

# Épreuve Biologie & Modélisation - Contrôle terminal - 10 décembre 2008

M. Bailly-Bechet & S. Mousset

Durée 1h30

*Tous documents autorisés - échanges strictement interdits.* Taille des gonopodes de *Gambusia*.

## 1 Répondre directement sur la feuille

Nom :  
Prénom :  
Numéro carte étudiant :

## 2 Statistiques : Taille des gonopodes de *Gambusia*.

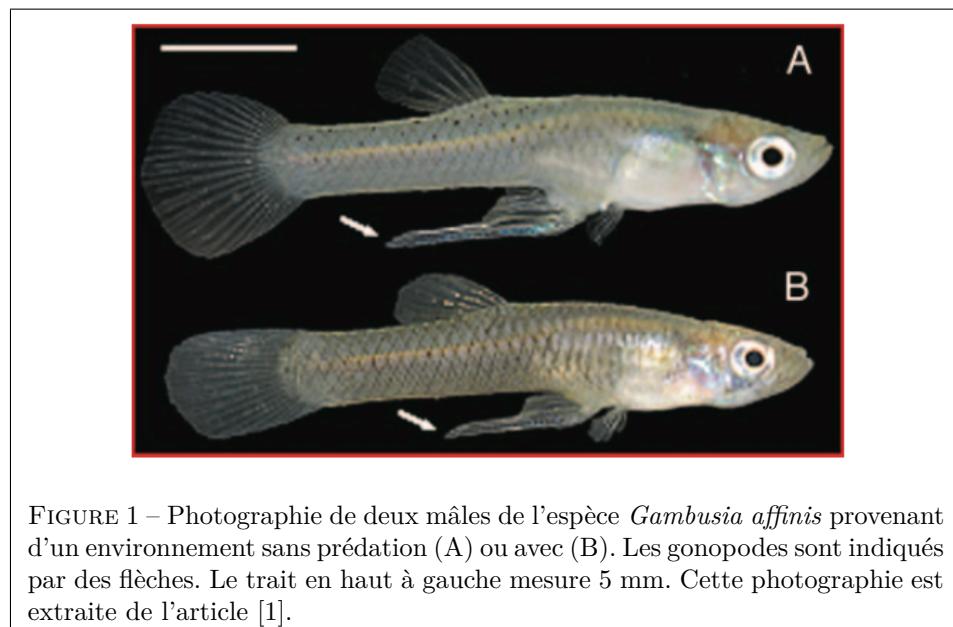
### 2.1 Introduction

Un équipe de chercheurs américains s'est récemment intéressée aux effets de la taille des gonopodes chez une espèce de poissons, *Gambusia affinis* [1]. Le gonopode, présent uniquement chez les mâles, est une nageoire anale qui a évolué de façon à devenir un organe d'insémination des femelles lors de la copulation (voir figure 1). Les facteurs auxquels se sont intéressés ces chercheurs sont les liens entre la taille relative des gonopodes (normalisée par rapport à la taille totale de l'individu), l'attraction provoquée sur les femelles, la nature de l'environnement et la vitesse de démarrage (lors d'une attaque) des *Gambusia* mâles. Les données ont été recueillies sur 300 poissons mâles équitablement répartis en 6 populations.

Les données<sup>1</sup> sont importées dans  avec l'instruction suivante :

```
gambusi <- read.table("https://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/gambusi.txt", header = TRUE)
gambusi[1:10,]
  index log.taille predation pop  vitesse
1      1   1.301130      0   AU 22.47150
2      2   1.293406      0   AU 21.88925
3      3   1.271140      0   AU 24.50346
4      4   1.283246      0   AU 23.52495
5      5   1.282712      0   AU 25.28887
6      6   1.260804      0   AU 21.18545
7      7   1.272864      0   AU 22.96189
```

1. les données originelles ne sont pas disponibles, il s'agit ici en fait d'une reconstitution à partir des résumés statistiques de l'article.



8	8	1.295631	0	AU 23.18245
9	9	1.294437	0	AU 22.77196
10	10	1.271855	0	AU 22.38695

À quoi sert la fonction `read.table()` ci-dessus ?

Réponse :

Que veut-on faire en écrivant `gambusi[1:10,]` plutôt que simplement `gambusi` ?  
Quel résultat obtiendrait-on en enlevant la virgule finale dans les crochets ?

Réponse :

Dans la liste ci-dessus, la colonne prédation indique si les poissons sont soumis ou non à la prédation. Chaque population dans son entier a la même valeur, à savoir 0 si elle vit dans un environnement sans préddation et 1 dans le cas contraire. Quelle commande permet-elle de compter combien de poissons sont soumis à la préddation ?

[1] 150

**Réponse :**

Comment calculez-vous la taille moyenne des gonopodes des individus soumis ou non à la préddation ?

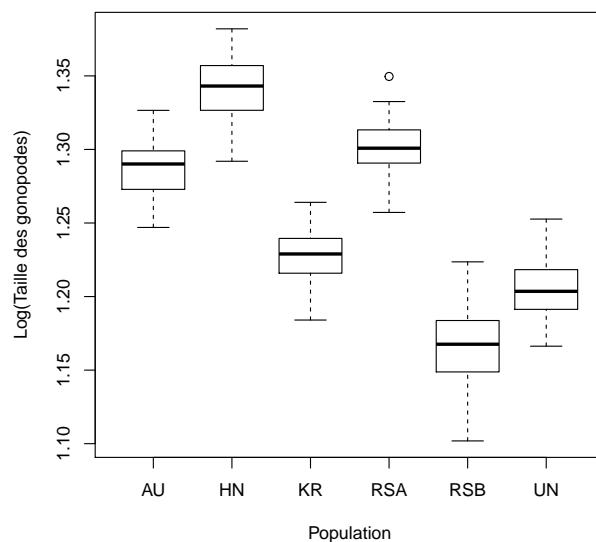
[1] 1.200105

[1] 1.310055

**Réponse :**

## 2.2 Taille des gonopodes et préddation

L'équipe de chercheurs a tracé un graphe représentant la taille des gonopodes en fonction de leur population d'origine.



Quelle commande  leur a permis d'obtenir ce graphe ?

**Réponse :**

D'après le graphique ci-dessus, peut-on dire qu'il y a une différence significative de la taille des gonopodes chez les populations soumises ou non à la prédation ? Les populations soumises à la prédation sont *KR*, *RSB* et *UN*.

**Réponse :**

On désire maintenant comparer les tailles des gonopodes des populations soumises ou non à la prédation à l'aide d'un test statistique, en sélectionnant un risque de première espèce  $\alpha = 5\%$ .

Donnez la définition du risque de première espèce :

**Réponse :**

Dans notre cas, l'hypothèse  $H_0$  est "La taille des gonopodes est indépendante de la prédation". L'hypothèse  $H_1$  est "La taille des gonopodes dépend de la prédation". Le test correspondant est le test dit de Student. Les résultats du tests sous  sont :

```
Welch Two Sample t-test
data: gambusi$log.taille[gambusi$predation == 0] and gambusi$log.taille[gambusi$predation == 1]
t = 30.162, df = 293.79, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.1027750 0.1171235
sample estimates:
mean of x mean of y
1.310055 1.200105
```

Si on accepte un risque de première espèce de 5%, quelle sera notre conclusion suite à ce test ?

**Réponse :**

### 2.3 Taille des gonopodes et vitesse de démarrage

On veut maintenant étudier la corrélation entre la taille des gonopodes et la vitesse de démarrage des poissons. Cette dernière a été mesurée en filmant des poissons que l'on "surprend" à l'aide d'un objet que l'on laisse tomber juste à côté d'eux dans leur bassin. On sait que, dans des conditions naturelles, une grande vitesse de démarrage est un facteur crucial pour échapper à la prédation.

Quelle commande  va-t-on utiliser pour calculer le coefficient de corrélation entre la vitesse de démarrage et la taille normalisée des gonopodes ?

**Réponse :**

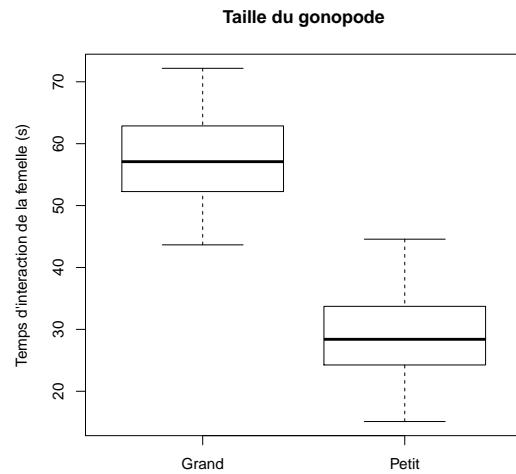
Ce coefficient de corrélation, sur nos données, vaut -0.751, et un test statistique montre qu'il est significativement différent de 0. Que pouvez-vous en conclure sur l'impact de la taille des gonopodes sur la survie dans un milieu où les poissons sont soumis à la prédation ?

**Réponse :**

### 2.4 Taille des gonopodes et attractivité sexuelle.

Finalement, on veut étudier la réaction de femelles *Gambusi* à des mâles ayant des gonopodes plus ou moins grands. Pour cela, on place les femelles dans un aquarium face à deux écrans vidéo, qui représentent des *Gambusi* mâles filmés durant leur parade amoureuse (qui précède l'accouplement). On s'assure que la seule différence entre les deux films est la taille des gonopodes des deux mâles filmés, c'est à dire que la nature de la danse et toutes les autres conditions

peuvent être considérées comme équivalentes. On mesure le temps que passe chaque femelle à regarder chacune des vidéos, et on obtient le graphe suivant :



Que pouvez-vous conclure de ce graphe, sur l'importance de la taille des gonopodes pour attirer les femelles ?

**Réponse :**

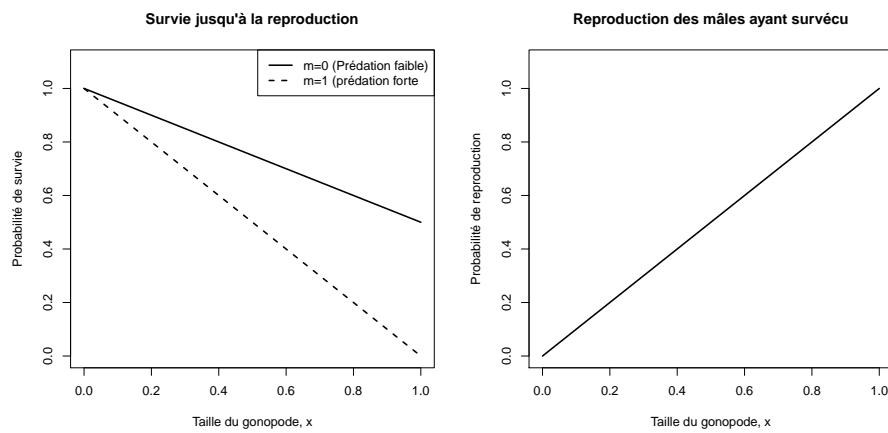
### 3 Modélisation

On s'intéresse à présent à l'évolution au cours du temps de la taille du gonopode des mâles. Pour cela, on s'intéresse à la “valeur sélective” (ou *fitness*) des individus selon la taille du gonopode. Une mesure directe de la valeur sélective d'un individu est simplement son nombre de descendants.

On propose un modèle où

- $x$  est la taille du gonopode des mâles ; elle peut varier entre 0 (le plus petit) et 1 (le plus grand).
- $m$  est la force de la préation ; elle peut varier entre 0 (pas de préation) et 1 (niveau de préation maximal).

On suppose que la taille du gonopode affecte pour chaque mâle sa probabilité de survie et de reproduction selon le modèle suivant :



- La probabilité de survie  $\mathbb{P}_s(x, m)$  des mâles jusqu'à la reproduction dépend de la taille du gonopode  $x$  et de la force de la préation  $m$  :

$$\mathbb{P}_s(x, m) = 1 - \frac{m+1}{2}x$$

- La probabilité de reproduction  $\mathbb{P}_r(x)$  des mâles ayant survécu dépend uniquement de la taille du gonopode  $x$  :

$$\mathbb{P}_r(x) = x$$

Pour une force de préation donnée  $m$ , la valeur sélective des mâles  $\omega_m(x)$  est directement le produit des deux probabilités précédentes (chaque mâle qui s'accouple a en moyenne le même nombre de descendants) :

$$\omega_m(x) = x \left( 1 - \frac{m+1}{2}x \right) \quad (1)$$

### 3.1 Taille optimale du gonopode

À l'aide de l'équation 1, trouvez la taille optimale de gonopode  $x_{\text{opt}}$  pour laquelle la valeur sélective  $\omega_m(x_{\text{opt}})$  d'un mâle est maximale pour une valeur de  $m$  fixée.

**Réponse :**

Quelle est la valeur sélective  $\omega_m(x_{\text{opt}})$  des mâles ayant un gonopode de longueur optimale ?

**Réponse :**

### 3.2 Évolution des fréquences phénotypiques

On considère un modèle où la taille du gonopode est complètement déterminée génétiquement et héritée par voie mâle uniquement. On envisage qu'il existe dans la population deux types de mâles (deux phénotypes) notés  $A$  et  $B$  ayant des tailles de gonopodes différentes.

On utilise la notation suivante :

- $x_A$  (respectivement  $x_B$ ) est la taille du gonopode des mâles  $A$  (respectivement  $B$ ).

- $p$  (respectivement  $1 - p$ ) est la proportion ou fréquence des mâles  $A$  (respectivement  $B$ ) dans la population.
- $\omega_A = \omega(x_A)$  (respectivement  $\omega_B = \omega(x_B)$ ) est la valeur sélective des mâles  $A$  (respectivement  $B$ ).

Comme  $p$  et  $1 - p$  sont des proportions, on a  $0 \leq p \leq 1$  et  $0 \leq 1 - p \leq 1$ .

La force de la prédation  $m$  étant fixée, la fréquence  $p$  des mâles de type  $A$  dans la population varie avec le temps et vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dt} = (\omega_A - \omega_B) p(1 - p) \quad (2)$$

Comment qualifie-t-on un modèle dynamique comme celui de l'équation 2 dont l'évolution est entièrement conditionnée par les paramètres du modèle et les conditions initiales ?

**Réponse :** Il s'agit d'un modèle ...

Que devient l'équation 2 lorsque  $\omega_A = \omega_B$  ? Que peut on alors dire de la proportion des mâles  $A$  au cours du temps ?

**Réponse :**

On considérera par la suite que  $\omega_A \neq \omega_B$ .

Quels sont les points d'équilibre du système décrit par l'équation 2 ?

**Réponse :**

À l'aide d'une méthode de votre choix, déterminez la stabilité des points d'équilibre du système (il faudra envisager deux cas).

**Réponse :**

Pour les deux cas identifiés précédemment, tracez les portraits de phase du système.

**Réponse :**

Vers quelle fréquence  $p_\infty$  le système va-t-il évoluer lorsque  $x_B = \frac{1}{1+m}$  et que la fréquence  $p_0$  des mâles  $A$  au temps 0 est telle que  $0 < p_0 < 1$ ?<sup>2</sup>

**Réponse :**

Quelle sera la taille des gonopodes des mâles de la population lorsque l'équilibre précédent sera atteint ?

**Réponse :**

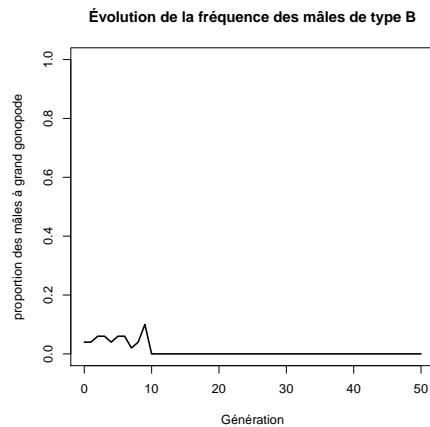
### 3.3 Résultat d'expérience

Pour tester en laboratoire les prédictions du modèle ci-dessus, des chercheurs placent dans un aquarium une population de 100 poissons constituée de :

1. 50 femelles.
2. 48 mâles  $A$  à petits gonopodes ( $x_A = \frac{1}{2}$ ) issus d'une population à forte prédation ( $m = 1$ ).
3. 2 mâles  $B$  à grands gonopodes ( $x_B = 1$ ) issus d'une population à faible prédation ( $m = 0$ ).

Cette population est ensuite maintenue dans l'aquarium *sans prédateurs* ( $m = 0$ ) durant plusieurs générations. Les chercheurs notent l'évolution de la fréquence des mâles à grands gonopodes dans l'aquarium et observent le résultat suivant :

2. Pour répondre à cette question, vous pourrez vous aider de la réponse à la première question de la section 3.1.



Ce résultat est-il en accord avec le modèle précédent ? Comment l'interpréteriez-vous ?

**Réponse :**

## Références

- [1] R Brian Langerhans, Craig A Layman, and Thomas J DeWitt. Male genital size reflects a tradeoff between attracting mates and avoiding predators in two live-bearing fish species. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 102(21):7618–7623, 2005 May 24.