

Exercices avec le logiciel 

# Épreuve Biologie & Modélisation - Contrôle terminal - 11 mai 2006

S. Mousset & J.R. Lobry

Durée 1h30

*Tous documents autorisés - échanges strictement interdits.* Modèles proies-prédateurs. Lièvres et lynx. Analyse qualitative des équations.

## 1 Répondre directement sur la feuille

Nom :  
Prénom :  
Numéro carte étudiant :

## 2 Modélisation

On s'intéresse à la dynamique de deux populations en interaction (une population de proies  $N$  et une de prédateurs  $P$ ). On utilise le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases} \quad (1)$$

où  $N$  et  $P$  désignent respectivement l'effectif (ou la biomasse) des proies et des prédateurs et  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs. On propose que dans ce modèle le produit  $NP$  est proportionnel à la probabilité de rencontre entre une proie et un prédateur.

### 2.1 Interprétation biologique

En l'absence de prédateur ( $P = 0$ ), nommez le type de croissance des proies.

Réponse :

Que représente la quantité  $\alpha NP$  ?

Réponse :

Que représente le paramètre  $\mu$  ?

**Réponse :**

Que représente la quantité  $\beta NP$  ?

**Réponse :**

## 2.2 Analyse qualitative des équations

Trouvez deux conditions (sur  $N$  et  $P$ ) pour que  $\frac{dN}{dt} = 0$ .

**Réponse :**

Trouvez deux conditions (sur  $N$  et  $P$ ) pour que  $\frac{dP}{dt} = 0$ .

**Réponse :**

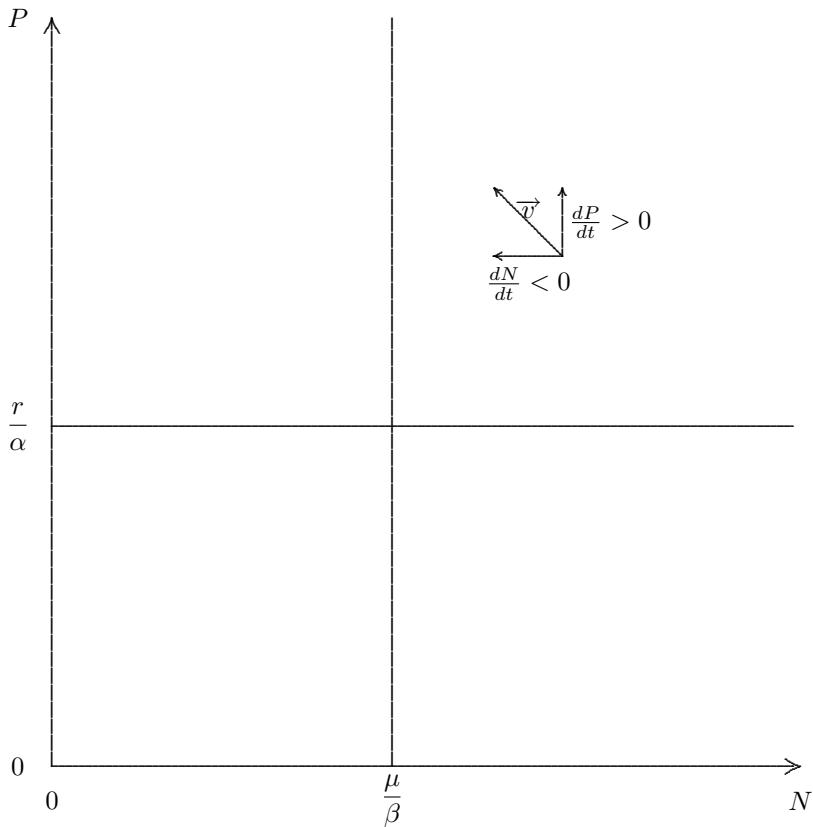
Que se passe-t-il lorsque  $N = \frac{\mu}{\beta}$  et  $P = \frac{r}{\alpha}$  ?

Réponse :

On représente l'évolution des effectifs  $N$  et  $P$  dans le repère  $N, P$  (une telle représentation s'appelle un "portrait de phase"). Dans le quadrant positif ( $N \geq 0$  et  $P \geq 0$ ), l'évolution instantanée des effectifs  $N$  et  $P$  se fait selon la direction du vecteur vitesse  $\vec{v} = \left( \frac{dN}{dt}, \frac{dP}{dt} \right)$ .

**Complétez la figure 1** en représentant la direction des vecteurs vitesse  $\vec{v}$  dans les quatre régions délimitées par les axes ( $N = 0$  et  $P = 0$ ) et les droites  $P = \frac{r}{\alpha}$  et  $N = \frac{\mu}{\beta}$ , ainsi que sur ces axes et droites.

FIG. 1 – Portrait de Phase



Les solutions  $(N(t), P(t))$  du système 1 vérifient

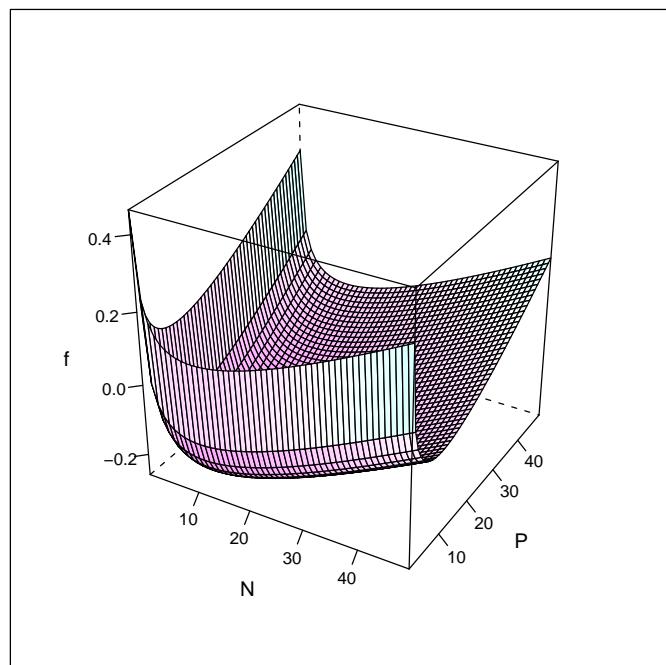
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dN}{dP} = \frac{(r - \alpha P)N}{(\beta N - \mu)P} \\ \Rightarrow \frac{\beta N - \mu}{N} dN = \frac{r - \alpha P}{P} dP \\ \Rightarrow \int (\beta - \frac{\mu}{N}) dN = \int (\frac{r}{P} - \alpha) dP \\ \Rightarrow \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P) = K \end{array}$$

où  $K$  est une constante quelconque.

On note  $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$ . La figure 2 est une représentation en 3 dimensions de  $f(N, P)$  pour  $r = 0.1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\mu = 0.1$  et  $\beta = 0.01$ .

Cette fonction admet un minimum local en  $\left(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha}\right)$ .

FIG. 2 – La fonction  $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$



Sachant que les solutions  $(N(t), P(t))$  du système 1 vérifient  $f(N, P) = K$ , et que  $f(N, P)$  admet un minimum en  $\left(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha}\right)$ , que pensez-vous des solutions  $(N(t), P(t))$

**Réponse :**

### 3 Statistiques

On a estimé les effectifs d'une population de lièvres (Hare) et de lynx (Lynx) au cours du temps (t). À quoi sert l'instruction suivante :

```
lh <- read.table("http://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/lynxhare.txt",
  header = TRUE)
```

**Réponse :**

Comment faire pour afficher les données de l'année 1914 :

```
t Hare Lynx
70 1914 40.97 43.36
```

**Réponse :**

Comment faire pour calculer le nombre moyen de lapins :

```
[1] 45.40648
```

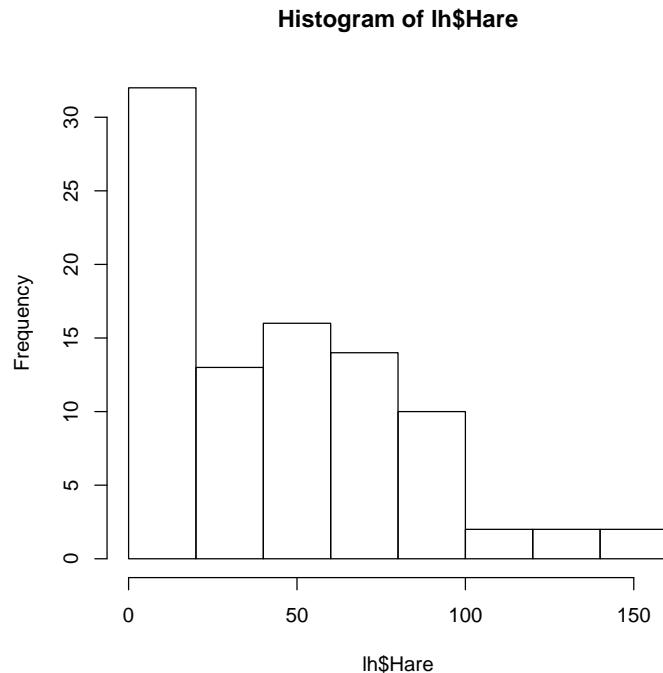
**Réponse :**

Comment faire pour calculer le résumé statistique suivant :

	t	Hare	Lynx
Min.	:1845	Min. : 1.80	Min. : 3.19
1st Qu.	:1868	1st Qu.: 12.73	1st Qu.:11.84
Median	:1890	Median : 40.97	Median :29.59
Mean	:1890	Mean : 45.41	Mean :28.34
3rd Qu.	:1912	3rd Qu.: 71.41	3rd Qu.:42.52
Max.	:1935	Max. :152.65	Max. :79.35

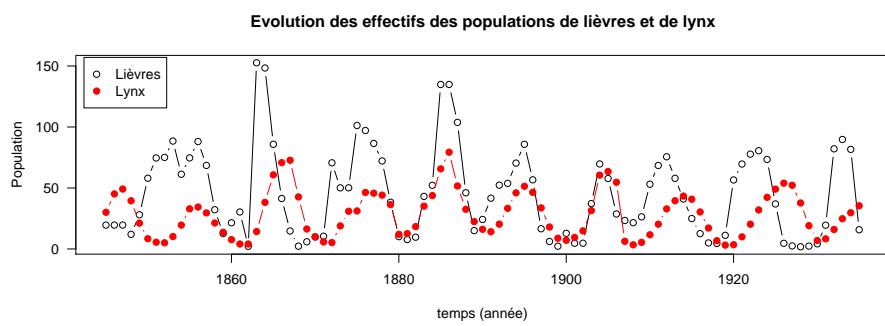
**Réponse :**

Comment faire pour obtenir le graphique suivant :



**Réponse :**

Comment faire pour obtenir le graphique suivant :



**Réponse :**

Décrivez l'évolution des effectifs des populations de lièvres et de lynx.

**Réponse :**

Le modèle que vous avez étudié dans la partie modélisation est-il à votre avis compatible avec les observations sur les lièvres et les lynx ?

**Réponse :**