Mathématiques Appliquées à la Biologie
Modélisation des systèmes dynamiques

Automne 2013

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

Pourquoi la modélisation ?

- La notion de modèles émerge en biologie dans les années 1960-70.
- La modélisation est devenue une étape clé de la recherche en biologie.
- La modélisation permet de mener une démarche expérimentale rigoureuse.

Qu'est-ce qu'un modèle ?

- Une représentation de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel.
- Utilisant un système symbolique :
  - équation mathématique
  - système informatique (langage de programmation, base de données...)
  - représentation géométrique (courbes, surfaces, cartes...)
- Interprétable en termes biologiques par exemple.

Quelques modèles que vous avez peut-être déjà rencontrés

- En biologie :
  - Génétique formelle : disjonction des allèles, lois de Mendel.
  - Enzymologie : cinétique enzymatique...
  - Génétique des populations : évolution des fréquences alléliques...
  - Biologie moléculaire : interprétation des életrophorèses...
  - et bien d'autres encore...
- En physique lors de vos études secondaires :
  - Mécanique : pendules, ressorts...
  - Électronique : circuits LC, RLC...
  - et bien d'autres encore...

Comment élaborer un modèle ?

La modélisation est la démarche qui permet l'élaboration d'un modèle. Cette étape prend en compte :

- L'objet et/ou le phénomène à représenter.
- Le système formel choisi.
- Les objectifs du modèle.
- Les données (relatives aux variables) et connaissances (relations entre les variables) disponibles ou accessibles par l'expérience ou par l'observation.

Cela passe généralement par une étape de simplification.

Le travail du modélisateur

Le travail du modélisateur dépend de la situation biologique et du système formel choisi. Les tâches à effectuer sont généralement :

- Formalise le problème $\approx$ écrire le modèle.
- Manipuler le modèle pour le rendre plus utilisable et étudier ses propriétés.
- Établir des relations avec d'autres représentations (graphes, programmes informatiques. . .).
- Interpréter le modèle et confronter les résultats du système formel avec des données réelles (issues de l'expérimentation).

Table des matières

Les équations différentielles ordinaires (EDO)

Pour ce cours nous nous intéresserons à la modélisation de systèmes dynamiqes à l'aide d'équations différentielles ordinaires :

- Outil mathématique simple.
- Permettant d'appréhender des phénomènes variés.
- Analyse et interprétation des résultats aisées.

Le plus souvent, nous essaierons d'illustrer le cours à l'aide d'exemples biologiques et/ou concrets.

Qu'est-ce qu'une EDO ?

Définition

Une EDO dans $\mathbb{R}$, dite EDO du premier ordre décrit l'évolution (ou la variation) dans le temps d'une variable de $\mathbb{R}$.

Exemples

- une variable quelconque $x(t)$,
- l'effectif d'une population $N(t)$,
- la concentration d'une substance chimique $c(t)$...

Notation des EDO

Pour une variable $x(t) \in \mathbb{R}$, une EDO d'ordre 1 s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

$\frac{dx}{dt}$ peut aussi être noté $x'(t)$ ou $\dot{x}$ et décrit la variation de x par rapport au temps.

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}$$

Les EDO autonomes / non autonomes

Une EDO est dite autonome si $\dot{x}$ ne dépend pas directement de t.

EDO autonome

$\dot{x} = f(x)$

EDO non autonome

$\dot{x} = f(x, t)$

Les EDO autonomes linéaires / non linéaires

Une EDO autonome est dite linéaire si $\dot{x} = f(x)$ est une expression linéaire de x.

EDO autonome linéaire

$$\dot{x} = f(x) = ax + b$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

EDO autonome non linéaire

exemple : le modèle de Monod

$$\dot{x} = \frac{a(b - x)x}{K - x}$$

Table des matières

La résolution des EDO simples

La résolution des EDO est au programme de L1.
Adresse utile : `http://spiral.univ-lyon1.fr/mathsv/`

La notion de voisinage

Lors de l'analyse qualitative des EDO, nous nous placerons souvent au "voisinage" d'un point particulier. Dans $\mathbb{R}$, un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ d'un point x_0 doit avoir les propriétés suivantes :

- $\mathcal{V}_{x_0}$ est un intervalle continu
- $x_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$
- $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad | \quad]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\quad \subset \quad \mathcal{V}_{x_0}$.

On considèrera très souvent un voisinage de x_0 pour lequel ϵ est très petit.

La notion de différentielle

Définition

Si g est une fonction de x, on appelle "différentielle de g" la quantité

$$dg = \frac{dg}{dx} dx.$$

Exemple

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{1}{x} dx$$

La quantité dg représente la variation de g relative à une variation de x, dx (différentielle de x).

La formule de Taylor

Soit f une fonction continue et dérivable n fois dans un voisinage $\mathcal{V}$ de a, alors dans ce voisinage V $f(a+x)$ peut s'écrire

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^{a+x} f^{(n+1)}(t) t^n \, dt}_{o(x^{n-1})}$$

Les développements limités d'ordre n

Un développement limité d'ordre n au voisinage du point a se déduit de la formule de Taylor.

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(x^n)$$

Le plus souvent, nous nous limiterons au développement limité d'ordre 1, c'est à dire de la tangeante à la courbe représentative de f au point $x = a$. C'est ce que nous appellerons "la linéarisation".

Algèbre linéaire

Pour la seconde partie du cours consacrée aux systèmes de deux EDO, nous utiliserons des notions d'algèbre linéaire vues précédemment telles que :

- les matrices 2×2,
- le déterminant d'une matrice 2×2,
- l'inverse d'une matrice 2×2 inversible,
- les valeurs propres d'une matrice 2×2,
- la diagonalisation d'une matrice $2 \times 2\ldots$