Analyse des systÃ¨mes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$

Automne 2013

S. Mousset

UniversitÃ© Claude Bernard Lyon I – France

Table des matiÃ¨res

1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
4. Exemples classiques
5. Pour aller plus loin

Plan dÃ©taillÃ©

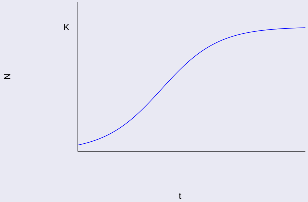
1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Les Ã©quations du modÃ¨le
   - Portrait de phase
   - DÃ©finitions

Le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

Dynamique des populations de proies et prÃ©dateurs sans interactions

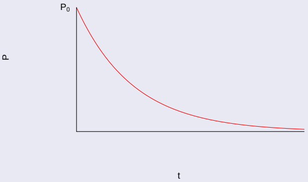
Les proies N

- croissance logistique, paramÃ¨tres r et K.



Les prÃ©dateurs P

- dÃ©croissance exponentielle, paramÃ¨tre μ



Le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

Les interactions proies-prÃ©dateurs

Si les dÃ©placements de proies et prÃ©dateurs se font au hasard, alors le nombre de rencontres entre proies et prÃ©dateurs est proportionnel au produit NP.

Les proies N

- Consommation Ã la vitesse αNP.
- α caractÃ©rise l'efficacitÃ© des attaques des prÃ©dateurs.

Les prÃ©dateurs

- Reproduction Ã la vitesse βNP.
- β caractÃ©rise le rendement des attaques en termes de reproduction des prÃ©dateurs.

Le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

Les Ã©quations du modÃ¨le

On a le systÃ¨me de deux EDO du premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} &= -\mu P + \beta NP \end{aligned} \right.$$

Dans le plan (N, P), on peut Ã©tudier le signe de $\dfrac{dN}{dt}$ et $\dfrac{dP}{dt}$.

Plan dÃ©taillÃ©

1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Les Ã©quations du modÃ¨le
   - Portrait de phase
   - DÃ©finitions

Portrait de phase

Signe de $\frac{dN}{dt}$

L'Ã©volution du nombre de proies dÃ©pend du signe de $\frac{dN}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} > 0 \quad &\iff \quad rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP > 0 \\ &\iff \quad N\left(r - \frac{rN}{K} - \alpha P\right) > 0 \\ &\iff \quad P < \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right)\end{aligned}$$

$\frac{dN}{dt} = 0$ pour $N = 0$ et $P = \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right)$.

Portrait de phase

Signe de $\dfrac{dP}{dt}$

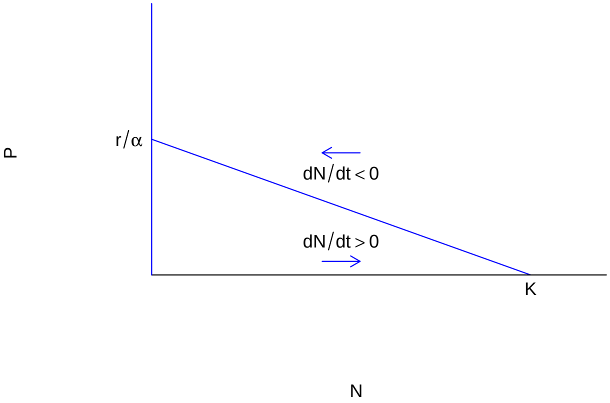
L'Ã©volution du nombre de prÃ©dateurs dÃ©pend du signe de $\dfrac{dP}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\mu P + \beta N P > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad P\left(\beta N - \mu\right) > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad N > \frac{\mu}{\beta}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{dP}{dt} = 0$ pour $P = 0$ et $N = \dfrac{\mu}{\beta}$.

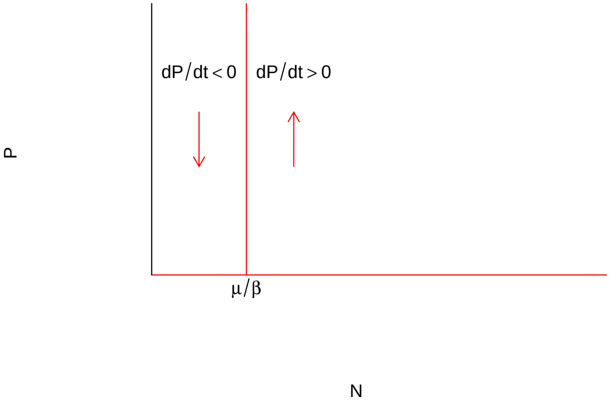
Portrait de phase

Signe de $\frac{dN}{dt}$



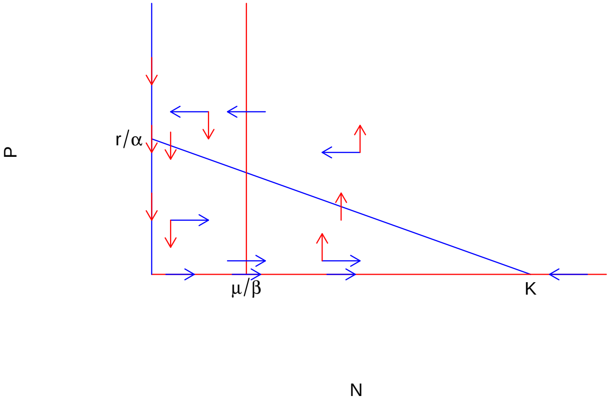
Portrait de phase

Signe de $\dfrac{dP}{dt}$



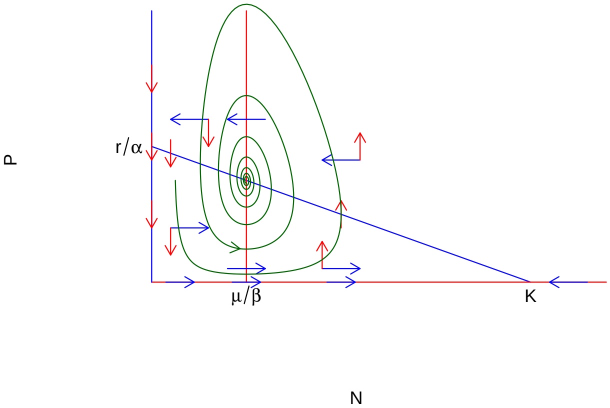
Portrait de phase

Vecteurs vitesse

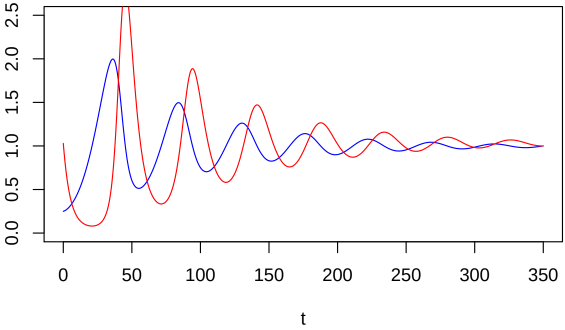


Portrait de phase

Ã‰volution du systÃ¨me



Chroniques



Plan dÃ©taillÃ©

1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Les Ã©quations du modÃ¨le
   - Portrait de phase
   - DÃ©finitions

DÃ©finitions

Point d'Ã©quilibre

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{array} \right.$$

Un point d'Ã©quilibre de ce systÃ¨me est un point $(x^\star, y^\star)$ qui vÃ©rifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & f(x^\star, y^\star) = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & g(x^\star, y^\star) = 0 \end{array} \right.$$

DÃ©finitions

Isoclines nulles

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

Les isoclines nulles de ce systÃ¨mes sont l'ensemble des points du plan qui vÃ©rifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y) = 0$$

Sur le portrait de phase, on parle d'isocline horizontale $\left(\dfrac{dy}{dt} = 0\right)$ ou verticale $\left(\dfrac{dx}{dt} = 0\right)$, selon la direction des vecteurs vitesses en ces points.

Table des matiÃ¨res

1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
4. Exemples classiques
5. Pour aller plus loin

Plan dÃ©taillÃ©

2 Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
- DÃ©finitions
- Solutions des systÃ¨mes d'EDO linÃ©aires (cas de 2 valeurs propres rÃ©elles)
- Exponentielles de matrices et formes de Jordan
- Typologie des systÃ¨mes planaires
- SynthÃ¨se

SystÃ¨me planaire

DÃ©finition

Un systÃ¨me d'EDO tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{array} \right.$$

est un systÃ¨me planaire si et seulement si

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma') \in \mathbb{R}^6 \mid \left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \alpha x + \beta y + \gamma \\ g(x,y) & = & \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{array} \right.$$

SystÃ¨me planaire

PropriÃ©tÃ©

Si $(x^\star, y^\star)$ est un point d'Ã©quilibre d'un systÃ¨me planaire, on effectue le changement de variable $x = x^\star + u \iff u = x - x^\star$ et $y = y^\star + v \iff v = y - y^\star$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dx}{dt} = f(x^\star + u, y^\star + v) \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = g(x^\star + u, y^\star + v) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \alpha u + \beta v \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = \alpha' u + \beta' v \end{cases}$$

SystÃ¨me planaire

PropriÃ©tÃ©

Pour tout systÃ¨me planaire, il existe un systÃ¨me planaire Ã©quivalent s'Ã©crivant $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & a_{11}u & + & a_{12}v \\ \\ \dfrac{dv}{dt} & = & a_{21}u & + & a_{22}v \end{cases}$$

Pour l'Ã©tude des systÃ¨mes non planaires, nous utiliserons un dÃ©veloppement de Taylor du premier degrÃ© pour nous placer dans un systÃ¨me planaire Ã©quivalent au voisinage des points d'Ã©quilibre.

SystÃ¨me planaire
Ecriture matricielle

Soit un systÃ¨me planaire du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dfrac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce systÃ¨me est Ã©quivalent Ã l'Ã©criture matricielle $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{MX}$ avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

SystÃ¨me planaire
Ecriture matricielle

Soit un systÃ¨me planaire du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est appelÃ©e "matrice Jacobienne" du systÃ¨me.

Plan dÃ©taillÃ©

2 Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
- DÃ©finitions
- Solutions des systÃ¨mes d'EDO linÃ©aires (cas de 2 valeurs propres rÃ©elles)
- Exponentielles de matrices et formes de Jordan
- Typologie des systÃ¨mes planaires
- SynthÃ¨se

Équation caractÃ©ristique

Soit un systÃ¨me planaire du type admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont les solutions de l'Ã©quation caractÃ©ristique

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\quad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{22} = 0 \\
\Leftrightarrow &\quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}) = 0 \\
\Leftrightarrow &\quad \lambda^2 - \lambda\mathtt{tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0
\end{aligned}$$

Équation caractÃ©ristique

Soit un systÃ¨me planaire du type admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La nature des solutions dÃ©pend du discriminant de l'Ã©quation caractÃ©ristique $\lambda^2 - \lambda \mathtt{tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0$

$$\Delta = \mathtt{tr}(\mathbf{M})^2 - 4\det(\mathbf{M})$$

oÃ¹ M$estlamatricedepassageconstitu©eparlesvecteurspropresde$M$associ$
et λ_2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ admet deux valeurs propres rÃ©elles

$$\lambda_1 = \frac{\mathtt{tr}(\mathbf{M}) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\mathtt{tr}(\mathbf{M}) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

On effectue un changement de bases pour se placer dans une base
oÃ¹ M$estdiagonale\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$

$\Delta > 0$

Alors, on pose

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + K_2 \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

On a alors

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ z(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

d'oÃ¹ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$

Plan dÃ©taillÃ©

2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
   - DÃ©finitions
   - Solutions des systÃ¨mes d'EDO linÃ©aires (cas de 2 valeurs propres rÃ©elles)
   - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
   - Typologie des systÃ¨mes planaires
   - SynthÃ¨se

Solutions de $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{MX}$

Soit un systÃ¨me planaire du type $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{MX}$, les solutions du systÃ¨me sont du type :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{M}t}\mathbf{X}_0$$

oÃ¹ e$^{\mathbf{M}}$ est l'exponentielle de la matrice $\mathbf{M}$ dÃ©finie par :

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!},$$

oÃ¹ M^0 $= \mathbf{I}$ (la matrice identitÃ©) et $\mathbf{X}_0$ est imposÃ© par les conditions initiales du systÃ¨me.

PropriÃ©tÃ©s des exponentielles de Matrices

1. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), alors $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.
2. Si $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, alors $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, d'oÃ¹e$^{-\mathbf{A}} = \left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1}$.
3. Si $\mathbf{B}$ est semblable Ã $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$), alors $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} e^{\mathbf{A}} \mathbf{P}$.
4. Si $\mathbf{B} = \mathbf{A}t$, alors $\dfrac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$.

Formes de Jordan dans $\mathbb{R}^2$

Proposition

Soit $\mathbf{A}$ une matrice rÃ©elle carrÃ©e de dimension 2, alors il existe une matrice rÃ©elle inversible $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est de l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}$ est la “forme de Jordan” rÃ©elle associÃ©e Ã $\mathbf{A}$.

Formes de Jordan dans $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Plan dÃ©taillÃ©

2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
   - DÃ©finitions
   - Solutions des systÃ¨mes d'EDO linÃ©aires (cas de 2 valeurs propres rÃ©elles)
   - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
   - Typologie des systÃ¨mes planaires
   - SynthÃ¨se

Forme de Jordan associÃ©e Ã la Jacobienne

Soit un systÃ¨me planaire du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & a_{11}\,u & + & a_{12}\,v \\ \\ \dfrac{dv}{dt} & = & a_{21}\,u & + & a_{22}\,v \end{cases}$$

Il existe une forme de Jordan rÃ©elle $\mathbf{J}$ associÃ©e Ã la matrice Jacobienne du systÃ¨me $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}$ sont emblables donc $\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}$ ont les mÃªmes valeurs propres.

Forme de Jordan associÃ©e Ã la Jacobienne

Valeurs propres de la Jacobienne

Les valeurs propres de $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sont les solutions de $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \\
\iff \quad & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\iff \quad & (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} = 0 \\
\iff \quad & \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 \\
\iff \quad & \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0
\end{aligned}
$$

Forme de Jordan associÃ©e Ã la Jacobienne

Équation caractÃ©ristique de la Jacobienne

Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont les solutions de l'Ã©quation caractÃ©ristique

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0.$$

On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

Typologie des systÃ¨mes planaires

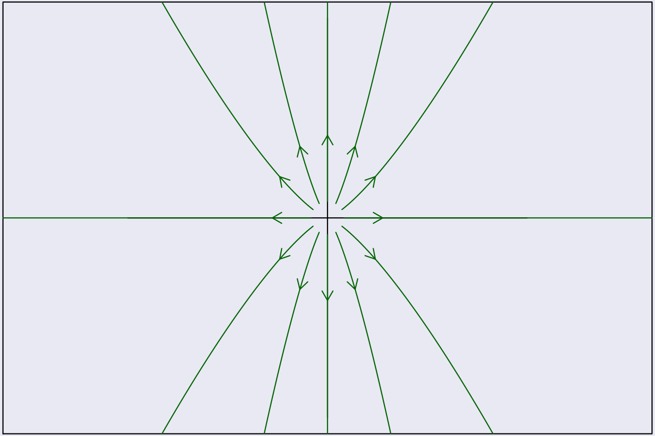
$\Delta > 0$, $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres rÃ©elles distinctes

- On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\mathbf{M}$.
- Des vecteurs propres associÃ©s sont $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$.
- La matrice de passage est $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Typologie des systÃ¨mes planaires

2 valeurs propres rÃ©elles distinctes positives

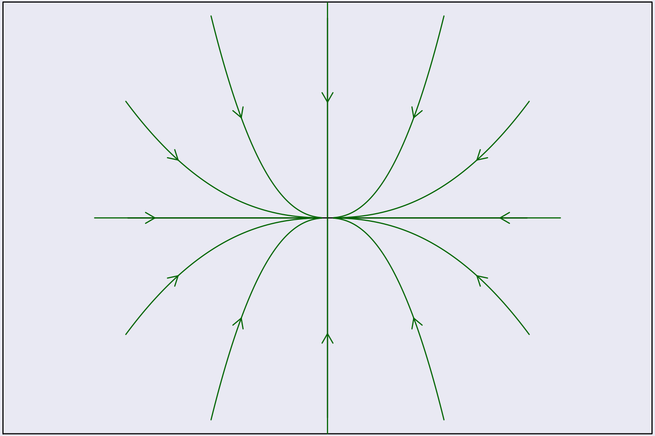
$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ Noeud instable



Typologie des systÃ¨mes planaires

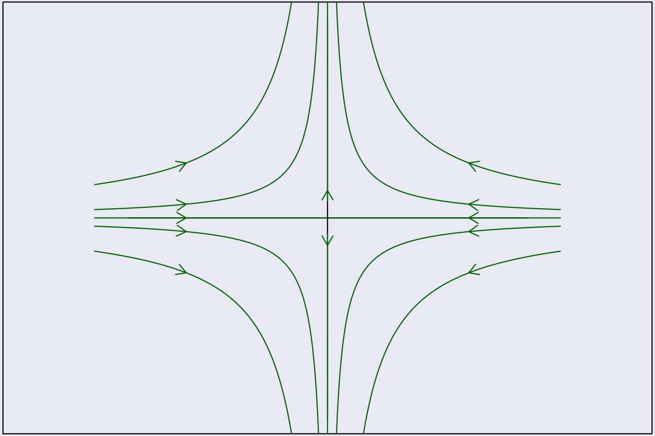
2 valeurs propres rÃ©elles distinctes nÃ©gatives

$\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ Noeud stable



Typologie des systÃ¨mes planaires
2 valeurs propres rÃ©elles de signes opposÃ©s

$\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ Point selle



Typologie des systÃ¨mes planaires

$\Delta = 0$, $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double rÃ©elle

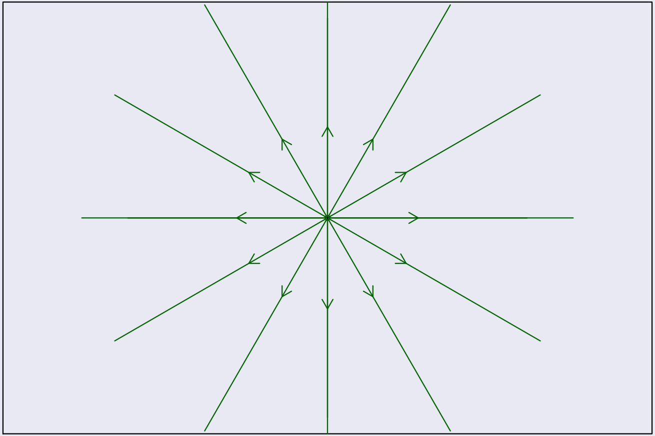
On distinque deux cas possibles :

1. $\mathbf{M}$ est dÃ©jÃ diagonale, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, alors $\mathbf{M}$ est dÃ©jÃ sous sa forme de Jordan $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{M}$ n'est pas dÃ©jÃ diagonale.

Typologie des systÃ¨mes planaires

1 valeur propre rÃ©elle double et $\mathbf{M}$ est diagonale

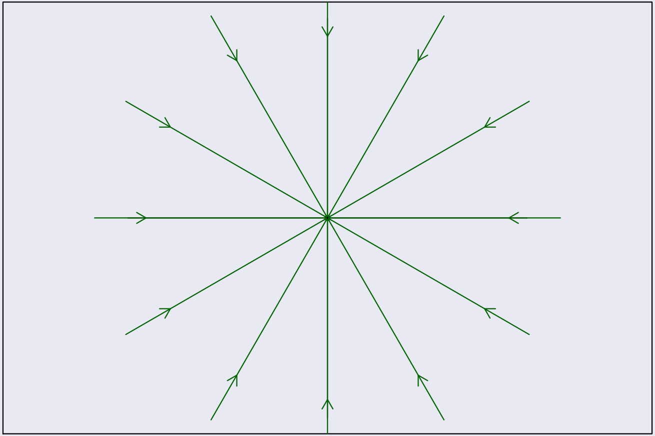
$\lambda_0 > 0$ Étoile instable



Typologie des systÃ¨mes planaires

1 valeur propre rÃ©elle double et $\mathbf{M}$ est diagonale

$\lambda_0 < 0$ Étoile stable



Typologie des systÃ¨mes planaires

$\Delta = 0$, $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double rÃ©elle et n'est pas diagonale

- On note λ_0 la valeur propre double de $\mathbf{M}$.
- Un vecteur propre associÃ© est $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur non colinÃ©aire Ã $\mathbf{u}_0$.
- La matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{01} & m_1 \\ u_{02} & m_2 \end{pmatrix}$ permet de triangulariser $\mathbf{M}$.

  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

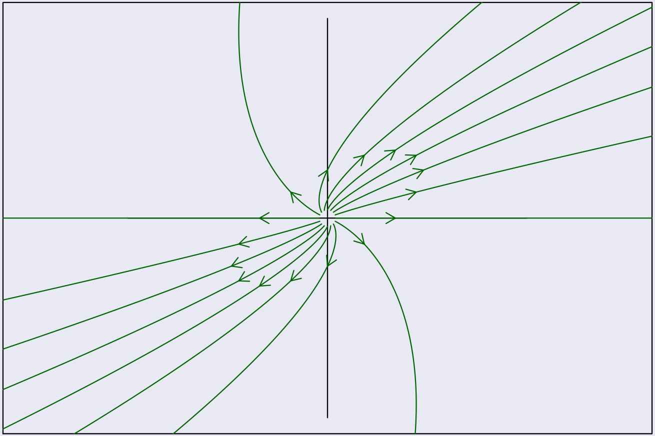
  oÃ^{1}c$estunr$©$elnonnul.Pourtriangulariser$M$, onutiliseunenouveller$

  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{P}$
- $\mathbf{P_1}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P_1} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

Typologie des systÃ¨mes planaires

1 valeur propre rÃ©elle double et $\mathbf{M}$ n'est pas diagonale

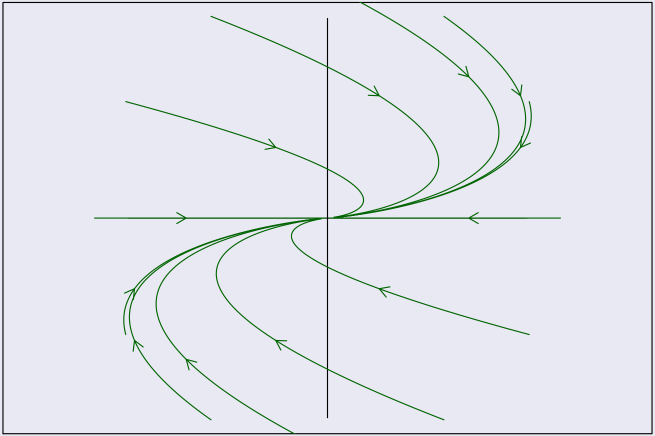
$\lambda_0 > 0$ Noeud dÃ©gÃ©nÃ©rÃ© instable



Typologie des systÃ¨mes planaires

1 valeur propre rÃ©elle double et $\mathbf{M}$ n'est pas diagonale

$\lambda_0 < 0$ Noeud dÃ©gÃ©nÃ©rÃ© stable



Typologie des systÃ¨mes planaires

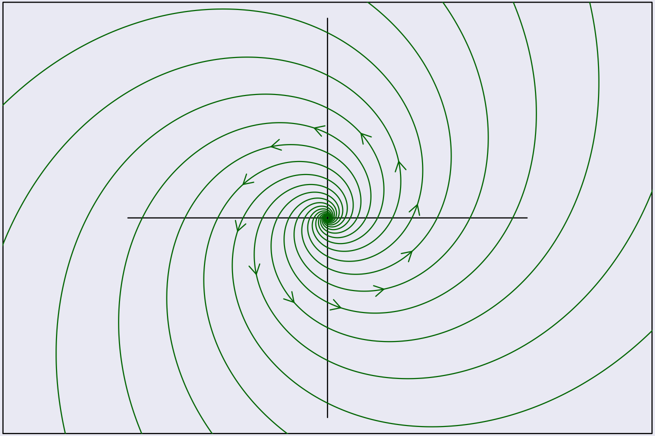
$\Delta < 0$, $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres complexes conjuguÃ©es

- On note $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, avec $\alpha = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M})}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$.
- Des vecteurs propres associÃ©s Ã λ_1 et λ_2 sont Ã©galement complexes conjuguÃ©s, et on peut Ã©crire $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, oÃ¹a$=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs rÃ©els de $\mathbb{R}^2$.
- La matrice de passage est $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Typologie des systÃ¨mes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguÃ©es

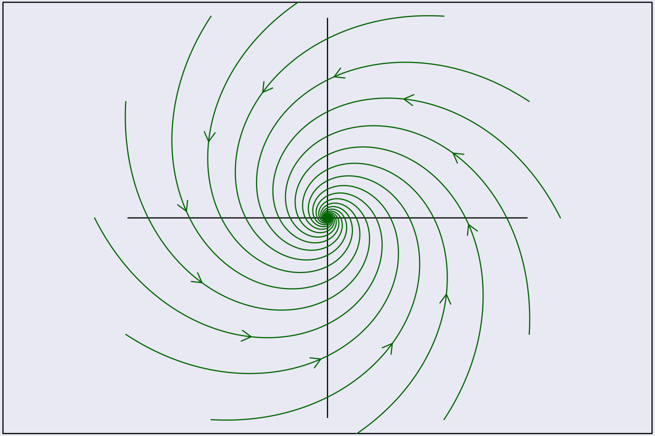
$\alpha > 0$ Foyer instable



Typologie des systÃ¨mes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguÃ©es

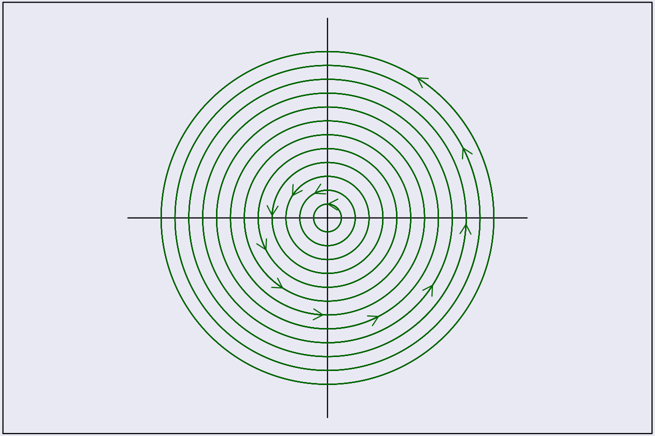
$\alpha < 0$ Foyer stable



Typologie des systÃ¨mes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguÃ©es

$\alpha = 0$ Centre



Plan dÃ©taillÃ©

2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
   - DÃ©finitions
   - Solutions des systÃ¨mes d'EDO linÃ©aires (cas de 2 valeurs propres rÃ©elles)
   - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
   - Typologie des systÃ¨mes planaires
   - SynthÃ¨se

Soit un systÃ¨me planaire du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & a_{11}u & + & a_{12}v \\ \dfrac{dv}{dt} & = & a_{21}u & + & a_{22}v \end{cases}$$

Ce systÃ¨me est Ã©quivalent au systÃ¨me $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{MX}$,
oÃ¹ M $estlamatriceJacobiennedusystÃ¨med©finiepar \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

Le type de point d'Ã©quilibre du systÃ¨me dÃ©pend du nombre, du type (complexe ou rÃ©el), et du signe de la partie rÃ©elle, des valeurs propres de la matrice Jacobienne du systÃ¨me $\mathbf{M}$. Ces valeurs propres sont solutions de l'Ã©quation caractÃ©ristique de $\mathbf{M}$,

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0.$$

On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

Cas $\Delta > 0$.

Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})}}{2}$$

- Si $\det(\mathbf{M}) > 0$, alors $\sqrt{(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})} < |\mathrm{tr}(\mathbf{M})|$ et λ_1 et λ_2 sont du signe de $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$. Le point d'Ã©quilibre est un nœud stable ou instable.
- Si $\det(\mathbf{M}) < 0$, alors $\sqrt{(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})} > |\mathrm{tr}(\mathbf{M})|$ et λ_1 et λ_2 sont de signes opposÃ©s. Le point d'Ã©quilibre est un point selle.

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

Cas $\Delta = 0$.

$\mathbf{M}$ possÃ¨de une valeur propre double

$$\lambda_0 = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M})}{2}$$

- Si $\mathbf{M}$ est diagonale, le point d'Ã©quilibre est une Ã©toile stable ou instable selon le signe de $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$.
- Si $\mathbf{M}$ n'est pas diagonale, le point d'Ã©quilibre est un nœud dÃ©gÃ©nÃ©rÃ© stable ou instable selon le signe de $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$.

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

Cas $\Delta < 0$.

$\mathbf{M}$ possÃ¨de deux valeurs propres complexes conjuguÃ©es

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{M})}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{|(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})|}}{2}$$

- Si $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) > 0$, le point d'Ã©quilibre est un foyer instable.
- Si $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) < 0$, le point d'Ã©quilibre est un foyer stable.
- Si $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = 0$, le point d'Ã©quilibre est un centre.

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

Dans le plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$, on peut reprÃ©senter les rÃ©gions d'apparition des diffÃ©rents types de points d'Ã©quilibre.
Le discriminant de l'Ã©quation caractÃ©ristique de la Jacobienne $\mathbf{M}$ du systÃ¨me est :

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

La parabole d'Ã©quation $\det(\mathbf{M}) = \frac{(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2}{4}$ dÃ©limite les rÃ©gions du plan oÃ¹ $\Delta > 0$ (sous la parabole) et $\Delta < 0$ (au dessus de la parabole).

Typologie des systÃ¨mes planaires : synthÃ¨se

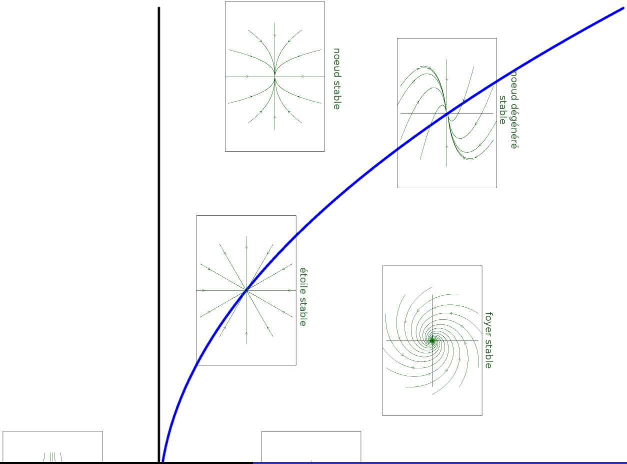


Table des matiÃ¨res

1. Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
2. Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$
3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
4. Exemples classiques
5. Pour aller plus loin

Plan dÃ©taillÃ©

3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
   - Exemple : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Isoclines et points d'Ã©quilibre
   - Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque
   - ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

ModÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

Les Ã©quations du modÃ¨le

Les Ã©quations du modÃ¨le sont :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

Plan dÃ©taillÃ©

3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
   - Exemple : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Isoclines et points d'Ã©quilibre
   - Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque
   - ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Isoclines nulles

Rappel

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x, y) \end{cases}$$

Les isoclines nulles de ce systÃ¨mes sont l'ensemble des points du plan qui vÃ©rifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0$$

Isoclines nulles
exemple

Dans le modÃ¨le proposÃ©, les isoclines verticales vÃ©rifient $\frac{dN}{dt} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad N\left(r - \frac{rN}{K} - \alpha P\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad N = 0 \\
& \quad \text{ou} \quad\ P = \frac{r(K-N)}{\alpha K}
\end{aligned}$$

Il existe deux isoclines verticales d'Ã©quation $N = 0$ et $P = \frac{r(K-N)}{\alpha K}$.

Isoclines nulles
exemple

Dans le modÃ¨le proposÃ©, les isoclines horizontales vÃ©rifient $\frac{dP}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = 0 \quad & \Longleftrightarrow & & -\mu P + \beta NP = 0 \\ & \Longleftrightarrow & & P(-\mu + \beta N) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & & P = 0 \\ & \text{ou} & & N = \frac{\mu}{\beta} \end{aligned}$$

Il existe deux isoclines horizontales d'Ã©quation $P = 0$ et $N = \frac{\mu}{\beta}$.

DÃ©finitions
Point d'Ã©quilibre

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

Un point d'Ã©quilibre de ce systÃ¨me est un point $(x^\star, y^\star)$ qui vÃ©rifie :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x^\star,y=y^\star} & = & f(x^\star,y^\star) = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=x^\star,y=y^\star} & = & g(x^\star,y^\star) = 0 \end{cases}$$

Points d'Ã©quilibre

Les points d'Ã©quilibre sont Ã l'intersection des isoclines horizontales et verticales. Dans le modÃ¨le de proposÃ©, il existe trois points d'Ã©quilibre :

$$\mathbf{A}_0 \begin{cases} N_0^\star = 0 \\ p_0^\star = 0 \end{cases}$$
$$\mathbf{A}_1 \begin{cases} P_1^\star = 0 \\ P_1^\star = \dfrac{r(K - N_1^\star)}{\alpha K} \iff N_1^\star = K \end{cases}$$
$$\mathbf{A}_2 \begin{cases} N_2^\star = \dfrac{\mu}{\beta} \\ P_2^\star = \dfrac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K} \end{cases}$$

Le point $\mathbf{A}_2$ n'existe que si $K > \frac{\mu}{\beta}$.

Étude du systÃ¨me au voisinage des points d'Ã©quilibre

Changement de variable

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y), \end{cases}$$

possÃ¨dant un point d'Ã©quilibre $(x^\star, y^\star)$.
On introduit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u & = & x - x^\star \\ v & = & y - y^\star \end{cases}$$

Étude du systÃ¨me au voisinage des points d'Ã©quilibre

LinÃ©arisation au voisinage du point d'Ã©quilibre

On linÃ©arise le systÃ¨me au voisinage du point d'Ã©quilibre en utilisant un dÃ©veloppement de Taylor au premier ordre des fonctions f et g

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^\star, y^\star) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} (x - x^\star) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} (y - y^\star) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^\star, y^\star) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} (x - x^\star) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} (y - y^\star) \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} \dot{u} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} u + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} v \\ \dot{v} = \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} u + \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} v \end{cases}$$

Plan dÃ©taillÃ©

3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
   - Exemple : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Isoclines et points d'Ã©quilibre
   - Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque
   - ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque

Soit un systÃ¨me dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce systÃ¨me est dÃ©finie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque

Exemple du modÃ¨le de Lotka-Volterra

Les Ã©quations du systÃ¨me sont

$$\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce systÃ¨me est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{N}}{\partial N} & \dfrac{\partial \dot{N}}{\partial P} \\ \\ \dfrac{\partial \dot{P}}{\partial N} & \dfrac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque

Exemple du modÃ¨le de Lotka-Volterra

Les Ã©quations du systÃ¨me sont

$$\begin{cases} \dot{N} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce systÃ¨me est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \dfrac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

Plan dÃ©taillÃ©

3. Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$
   - Exemple : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra
   - Isoclines et points d'Ã©quilibre
   - Jacobienne d'un systÃ¨me quelconque
   - ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Soit un systÃ¨me non linÃ©aire $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ admettant un point d'Ã©quilibre $(x^\star, y^\star)$ et tel que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, oÃ¹ A $estlamatriceJacobiennedusystÈmeaupoint$(x*, $y^\star$). Alors, dans un voisinage du point d'Ã©quilibre, les portraits de phase du systÃ¨me $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ et de sa forme linÃ©arisÃ©e $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{AU}$ sont qualitativement Ã©quivalents, sous rÃ©serve que le systÃ¨me linÃ©arisÃ© ne corresponde pas Ã des centres.

ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra (cas $K > \frac{\mu}{\beta}$)

On se place dans le cas oÃ$^1 ilexistetroispointsd'©quilibre$K $> \mu_{\overline{\beta}}$.

La Jacobienne du systÃ¨me est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \dfrac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

Au point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$, la Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_{A_0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M}_{A_0}) = -r\mu < 0$ donc le point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$ est un point selle.

ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Au point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_1 = (K, 0)$, la Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_{A_1} = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M}_{A_1}) = -r(\beta K - \mu) < 0$ (car $\beta K > \mu$) donc le point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_1 = (K, 0)$ est un point selle.

ThÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation

Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Au point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_2 = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K})$, la Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_{A_2} = \begin{pmatrix} -r\frac{N^\star}{K} & -\alpha N^\star \\ \beta P^\star & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M}_{A_2}) = \alpha\beta N^\star P^\star > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{M}_{A_2}) = -r\frac{N^\star}{K} < 0$ donc le point d'Ã©quilibre $\mathbf{A}_2$ est un nœud, un nœud dÃ©gÃ©nÃ©rÃ©, ou un foyer stable selon le signe de $\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}_{A_2}))^2 - 4\det(\mathbf{M}_{A_2})$.

Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Étude du signe de Δ

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \Delta & = & (\mathrm{tr}(\mathbf{M}_{A_2}))^2 - 4\det(\mathbf{M}_{A_2}) \\
 & & = & \left(\frac{r}{K}N^\star\right)^2 - 4\alpha\beta N^\star P^\star \\
\Longleftrightarrow & \frac{\Delta}{N^\star} & = & \frac{r^2}{K^2}\frac{\mu}{\beta} - 4\alpha\beta\frac{r}{\alpha K}\left(K - \frac{\mu}{\beta}\right) \\
\Longleftrightarrow & \frac{K\Delta}{rN^\star} & = & r\frac{\mu}{K\beta} + 4(\mu - \beta K).
\end{array}
$$

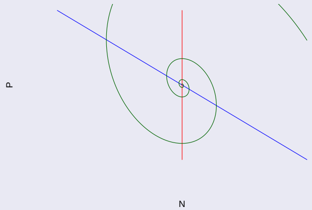
Δ est donc du signe de $r\frac{\mu}{K\beta} + 4(\mu - \beta K)$.

$$\Delta < 0 \iff r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$$

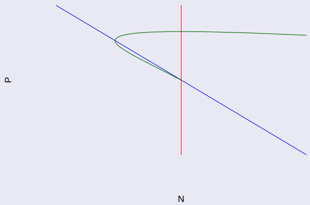
Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Portrait de phase au voisinage de $\mathbf{A}_2$

$r < \dfrac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu} \Rightarrow$ foyer stable

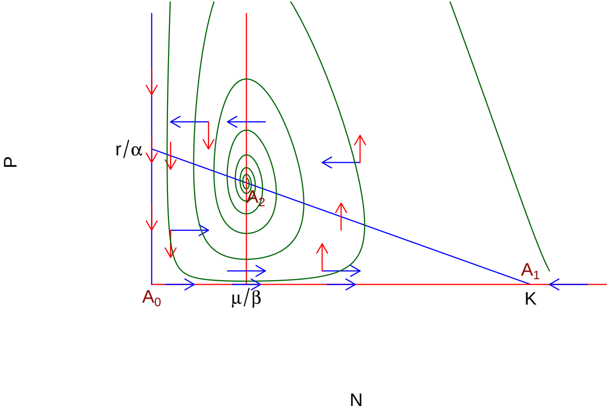


$r > \dfrac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu} \Rightarrow$ nœud stable



Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Portrait de phase (cas $K > \frac{\mu}{\beta}$ et $r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$)



Application au modÃ¨le de Lotka et Volterra

Chroniques (cas $K > \frac{\mu}{\beta}$ et $r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$)

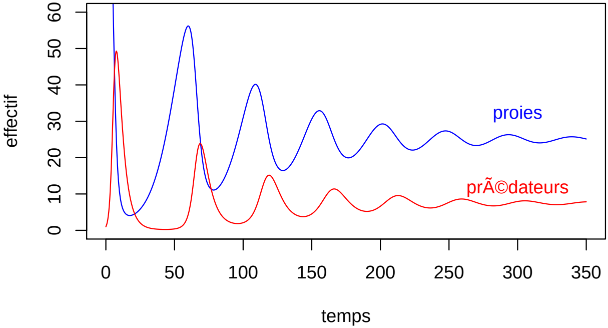


Table des matiÃ¨res

1 Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

2 Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$

3 Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$

4 Exemples classiques

5 Pour aller plus loin

Plan dÃ©taillÃ©

4. Exemples classiques
   - Le modÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique de Lotka-Volterra
   - Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

PrÃ©sentation du modÃ¨le

On modÃ©lise deux espÃ¨ces 1 et 2 en compÃ©tition

- Croissance logistique en absence de compÃ©tition
- Chaque individu de l'espÃ¨ce 2 gÃ¨ne la croissance de l'espÃ¨ce 1 comme α individus de l'espÃ¨ce 1.
- Chaque individu de l'espÃ¨ce 1 gÃ¨ne la croissance de l'espÃ¨ce 2 comme β individus de l'espÃ¨ce 2.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Les Ã©quations du modÃ¨le

EspÃ¨ce 1

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1}\right)$$

EspÃ¨ce 2

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \beta N_1}{K_2}\right)$$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Isoclines nulles : isoclines verticales $\dot{N}_1 = 0$

On rÃ©soud $\dot{N}_1 = 0$

$$
\begin{array}{cr}
 & \frac{dN_1}{dt} = 0 \\
\Longleftrightarrow & r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow & N_1 = 0 \\
\text{ou} & \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} = 1 \\
\Longleftrightarrow & N_1 + \alpha N_2 = K_1 \\
\Longleftrightarrow & N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}
\end{array}
$$

Il y a deux isoclines verticales d'Ã©quation $N_1 = 0$ et $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Isoclines nulles : isoclines horizontales $\dot{N}_2 = 0$

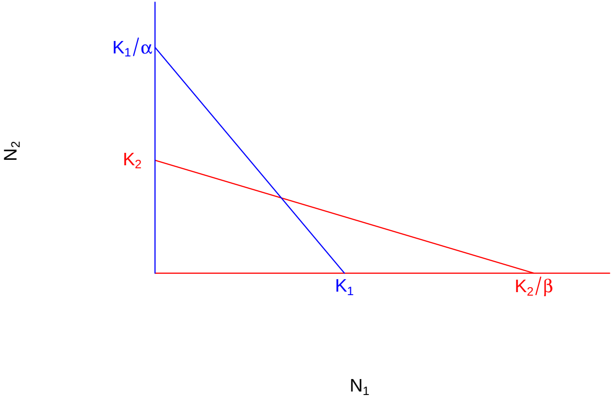
On raisonne par symÃ©trie ($N_1 \leftrightarrow N_2$, $K_1 \leftrightarrow K_2$, $r_1 \leftrightarrow r_2$ et $\alpha \leftrightarrow \beta$).

$$\begin{array}{rr} & \frac{dN_2}{dt} = 0 \\ \iff & N_2 = 0 \\ \text{ou} & N_1 = \frac{K_2 - N_2}{\beta} \\ \iff & N_2 = K_2 - \beta N_1 \end{array}$$

Il y a deux isoclines horizontales d'Ã©quation $N_2 = 0$ et $N_2 = K_2 - \beta N_1$.

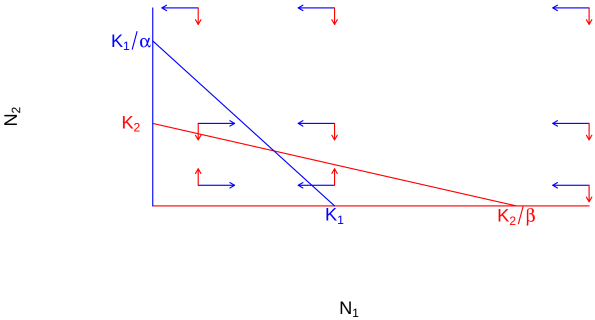
ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Portrait de phase



ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Portrait de phase : directions des vecteurs vitesse



ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Points d'Ã©quilibre

Points d'Ã©quilibres sur l'isocline verticale $N_1 = 0$

- $N_2 = 0$, un point d'Ã©quilibre $A_0 : (N^\star_{1\,(0)} = 0; N^\star_{2\,(0)} = 0)$.
- $N_2 = K_2 - N_1$ un point d'Ã©quilibre $A_1 : (N^\star_{1\,(1)} = 0; N^\star_{2\,(1)} = K_2)$.

Points d'Ã©quilibres sur l'isocline verticale $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$

- $N_2 = 0$, un point d'Ã©quilibre $A_2 : (N^\star_{1\,(2)} = K_1; N^\star_{2\,(2)} = 0)$.
- $N_2 = K_2 - \beta N_1$ un point d'Ã©quilibre $A_3 : (N^\star_{1\,(3)} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N^\star_{2\,(3)} = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Points d'Ã©quilibre

Il y a quatre points d'Ã©quilibre

- $A_0 : (N^\star_{1\,(0)} = 0; N^\star_{2\,(0)} = 0).$
- $A_1 : (N^\star_{1\,(1)} = 0; N^\star_{2\,(1)} = K_2).$
- $A_2 : (N^\star_{1\,(2)} = K_1; N^\star_{2\,(2)} = 0).$
- $A_3 : (N^\star_{1\,(3)} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1-\alpha\beta}; N^\star_{2\,(3)} = \frac{K_2-\beta K_1}{1-\alpha\beta})$

Conditions d'existence du point d'Ã©quilibre A_3

$$\left\{\begin{array}{c} 1-\alpha\beta > 0 \\ \frac{K_1}{K_2} > \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} > \beta \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{c} 1-\alpha\beta < 0 \\ \frac{K_1}{K_2} < \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} < \beta \end{array}\right.$$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne du systÃ¨me est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r_1\left(1 - \dfrac{2N_1 + \alpha N_2}{K_1}\right) & -\dfrac{\alpha r_1}{K_1} N_1 \\ -\dfrac{\beta r_2}{K_2} N_2 & r_2\left(1 - \dfrac{2N_2 + \beta N_1}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point d'Ã©quilibre A_0 : $(N_1^\star{}_{(0)} = 0; N_2^\star{}_{(0)} = 0)$, la matrice Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

A_0 est un nœud instable.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point d'Ã©quilibre A_1 : $(N^\star_{1\,(1)} = 0; N^\star_{2\,(1)} = K_2)$, la matrice Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} r_1\left(1 - \alpha\dfrac{K_2}{K_1}\right) & 0 \\ \\ -\beta r_2 & -r_2 \end{pmatrix}$$

- Si $\frac{K_1}{\alpha} < K_2$, alors $\det(\mathbf{M}_1) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{M}_1) < 0$, A_1 est donc un point d'Ã©quilibre stable.
- Si $\frac{K_1}{\alpha} > K_2$, alors $\det(\mathbf{M}_1) < 0$, A_1 est donc un point selle.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point d'Ã©quilibre A_2 : $(N^\star_{1\,(2)} = K_1; N^\star_{2\,(2)} = 0)$, on raisonne par symÃ©trie

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -r_1 & -\alpha r_1 \\ & \\ 0 & r_2\left(1 - \beta \dfrac{K_1}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

- Si $\frac{K_2}{\beta} < K_1$, alors $\det(\mathbf{M}_2) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{M}_2) < 0$, A_2 est donc un point d'Ã©quilibre stable.
- Si $\frac{K_2}{\beta} > K_1$, alors $\det(\mathbf{M}_2) < 0$, A_2 est donc un point selle.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point d'Ã©quilibre A_3 : $({N_1^\star}_{(3)} = \frac{K_1-\alpha K_2}{1-\alpha\beta}; {N_2^\star}_{(3)} = \frac{K_2-\beta K_1}{1-\alpha\beta})$, la matrice Jacobienne s'Ã©crit :

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} r_1\left(1 - \dfrac{2{N_1^\star}_{(3)} + \alpha {N_2^\star}_{(3)}}{K_1}\right) & -\dfrac{\alpha r_1 {N_1^\star}_{(3)}}{K_1} \\ -\dfrac{\beta r_2 {N_2^\star}_{(3)}}{K_2} & r_2\left(1 - \dfrac{2{N_2^\star}_{(3)} + \beta {N_1^\star}_{(3)}}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point d'Ã©quilibre A_3 : $(N_1^\star{}_{(3)} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1-\alpha\beta}; N_2^\star{}_{(3)} = \frac{K_2 - \beta K_1}{1-\alpha\beta})$, la matrice Jacobienne s'Ã©crit :

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{r_1 N_1^\star{}_{(3)}}{K_1} & -\dfrac{\alpha r_1 N_1^\star{}_{(3)}}{K_1} \\ \\ -\dfrac{\beta r_2 N_2^\star{}_{(3)}}{K_2} & -\dfrac{r_2 N_2^\star{}_{(3)}}{K_2} \end{pmatrix}$$

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

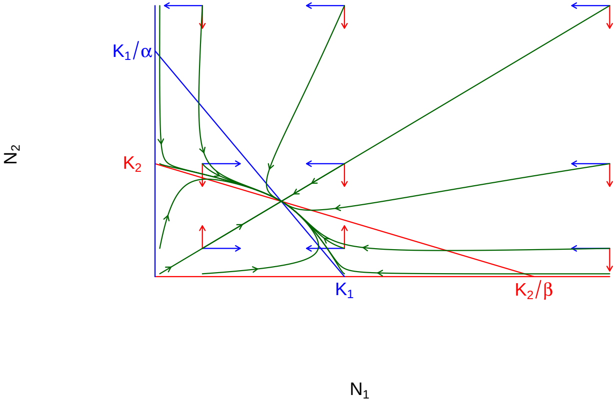
$$\det(\mathbf{M}_3) = (1-\alpha\beta)\frac{r_1 r_2 N^\star_{1\,(3)} N^\star_{2\,(3)}}{K_1 K_2}$$ est du signe de $(1-\alpha\beta)$.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}_3) = -\frac{r_1 N^\star_{1\,(3)}}{K_1} - \frac{r_2 N^\star_{2\,(3)}}{K_2} < 0$$

- Si $(1-\alpha\beta) < 0$, alors A_3 est un point selle.
- Si $(1-\alpha\beta) > 0$, alors A_3 est un point d'Ã©quilibre stable.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

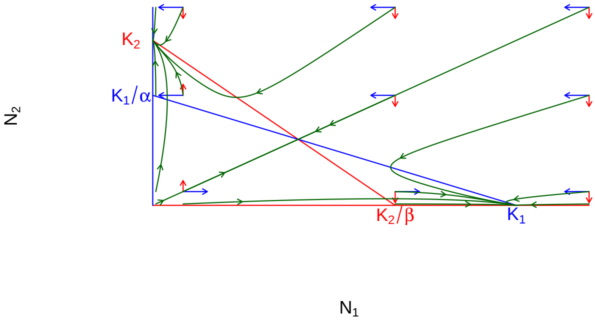
Portrait de phase : cas oÃ¹ A_3 existe et $1-\alpha\beta>0$



Il y a coexistence des deux espÃ¨ces.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

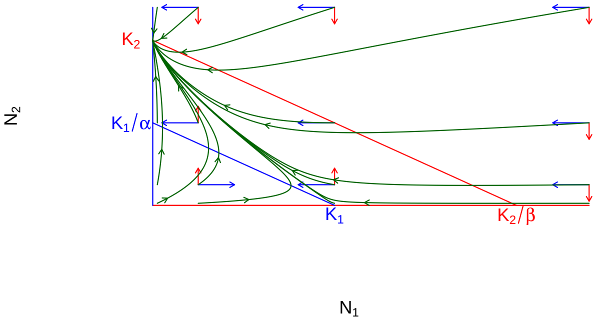
Portrait de phase : cas oÃ¹ A_3 existe et $1 - \alpha\beta < 0$



Il y a exclusion mutuelle.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

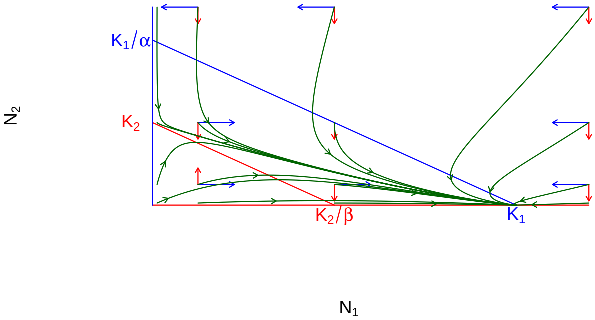
Portrait de phase : cas oÃ¹ A3 n'existe pas et $K_2 > K_1/\alpha$



L'espÃ¨ce 2 exclut l'espÃ¨ce 1.

ModÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique

Portrait de phase : cas oÃ¹ A$_3$ n'existe pas et $K_1 > K_2/\beta$



L'espÃ¨ce 1 exclut l'espÃ¨ce 2.

Plan dÃ©taillÃ©

4. Exemples classiques
   - Le modÃ¨le de compÃ©tition interspÃ©cifique de Lotka-Volterra
   - Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

PrÃ©sentation du modÃ¨le

Ce modÃ¨le distingue trois classes d'individus selon leur susceptibilitÃ© vis-Ã -vis d'une maladie contagieuse.

- Les individus susceptibles S sont sains et peuvent Ãªtre contaminÃ©s.
- Les individus infectÃ©s I peuvent contaminer les individus susceptibles.
- Les individus immunisÃ©s R ont Ã©tÃ© infectÃ©s et sont immunisÃ©s quelques temps contre la maladie. Ils redeviennent ensuite susceptibles.

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Équations du modÃ¨le

Les Ã©quations du modÃ¨le sont

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma R \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{cases}$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

InterprÃ©tation biologique

- βIS est le terme d'interaction entre les individus susceptibles et les individus infectÃ©s. C'est la quantitÃ© d'individus susceptibles devenant infectÃ©s par unitÃ© de temps dt.
- νI est la quantitÃ© d'individus infectÃ©s qui guÃ©rissent par unitÃ© de temps dt.
- γR est la quantitÃ© d'individus immunisÃ©s qui perdent leur immunitÃ© par unitÃ© de temps dt.

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Points d'Ã©quilibre

Si on note $N = S + I + R$, on a

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \beta IS - \beta IS + \gamma R - \gamma R + \nu I - \nu I = 0$$

$\dfrac{dN}{dt} = 0 \iff N = N_0$, on peut donc rÃ©duire ce systÃ¨me Ã un systÃ¨me Ã deux dimensions S et I, on aura Ã tout instant $R = N_0 - S - I$.

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Points d'Ã©quilibre

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma R = \beta I S \\[2ex] \nu I = \beta I S \\[2ex] \nu I = \gamma R \end{cases} \iff \begin{cases} S = \dfrac{\gamma R}{\beta I} \\[2ex] I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \dfrac{\nu}{\beta} \\[2ex] R = \dfrac{\nu}{\gamma} I \end{cases}$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Points d'Ã©quilibre

- $I_0^\star = 0 \Rightarrow R_0^\star = 0$ et $S_0^\star = N_0$, tous les individus sont sains.
- $S_1^\star = \frac{\nu}{\beta}$, $I_1^\star = N_0 - R_1^\star - S_1^\star$ et $R_1^\star = \frac{\nu}{\gamma} I_1^\star$ donc

$$S_1^\star = \frac{\nu}{\beta}$$

$$I_1^\star = \frac{N_0 - \frac{\nu}{\beta}}{1 + \frac{\nu}{\gamma}} = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)}$$

$$R_1^\star = \frac{N_0 - \frac{\nu}{\beta}}{1 + \frac{\gamma}{\nu}} = \frac{\nu(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)}$$

Ce point n'existe que si $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Isoclines nulles

En utilisant la relation $N_0 = S + I + R$,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta IS + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I - \gamma R \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \nu I \end{aligned} \right.$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Isoclines nulles

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S = 0 \\ \\ I(\beta S - \nu) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} S = \dfrac{\gamma(N_0 - I)}{\beta I + \gamma} \\ \\ I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \dfrac{\nu}{\beta} \end{cases}$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Matrice Jacobienne du systÃ¨me

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \nu I \end{aligned} \right. \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point $(S_0^\star = N_0; I_0^\star = 0)$, la Jacobienne s'Ã©crit

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta N_0 - \gamma \\ 0 & \beta N_0 - \nu \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(\mathbf{M}_0) = -\gamma + \beta N_0 - \nu$ et $\det(\mathbf{M}_0) = -\gamma(\beta N_0 - \nu)$

$N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

$\det(\mathbf{M}_0) < 0$

$\Rightarrow (S_0^\star; I_0^\star)$ est un point selle.

$N_0 < \frac{\nu}{\beta}$

$\det(\mathbf{M}_0) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{M}_0) < 0$

$$\begin{aligned} \Delta = \; & (-\gamma + \beta N_0 - \nu)^2 \\ & +4\gamma(\beta N_0 - \nu) \\ = \; & (-\gamma - \beta N_0 + \nu)^2 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (S_0^\star; I_0^\star)$ est un nœud stable.

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

StabilitÃ© des points d'Ã©quilibre

Au point $\left(S_1^\star = \dfrac{\nu}{\beta}; I_1^\star = \dfrac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma+\nu)}\right)$, la Jacobienne s'Ã©crit

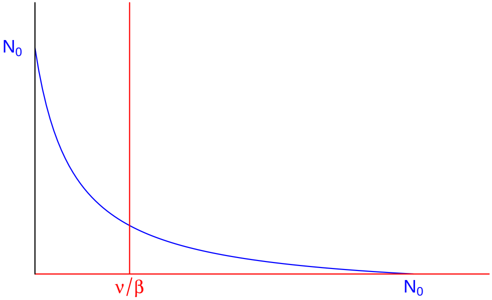
$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\beta I_1^\star - \gamma & -\beta S_1^\star - \gamma \\ \beta I_1^\star & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}(\mathbf{M}_1) = -\beta I_1^\star - \gamma < 0 \\ \det(\mathbf{M}_1) = \beta I_1^\star(\beta S_1^\star + \gamma) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (S_1^\star; I_1^\star) \text{ est stable.}$$

Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

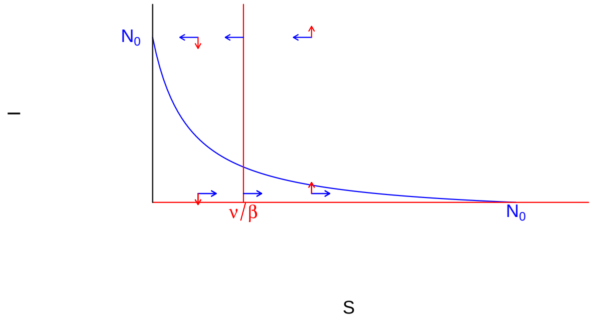
–



S

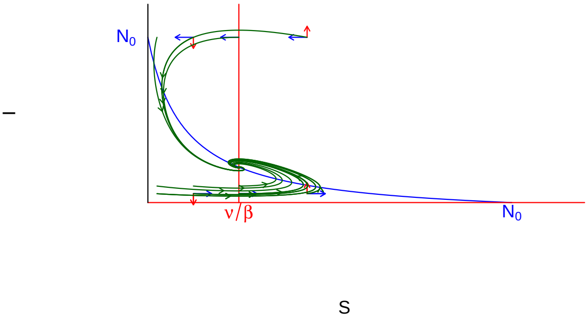
Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, directions des vecteurs vitesse



Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

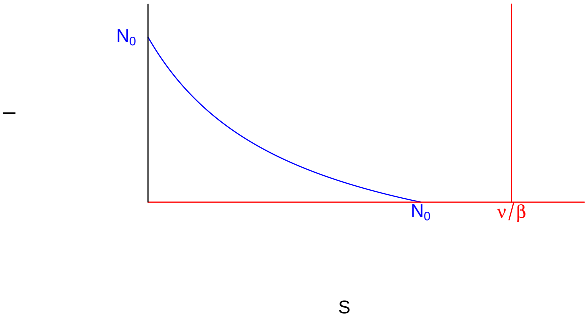
Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, trajectoires



Ã l'Ã©quilibre $I_1^\star > 0$, $S_1^\star = \frac{\nu}{\beta}$ et $R_1^\star = N_0 - I_1^\star - S_1^\star$.

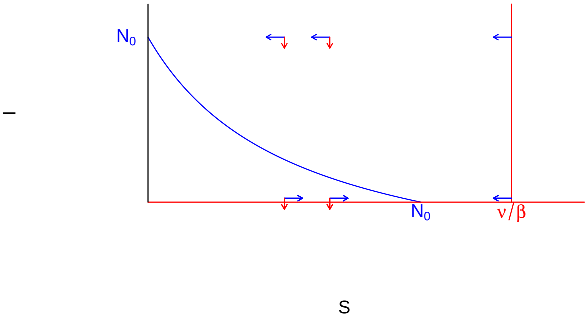
Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$



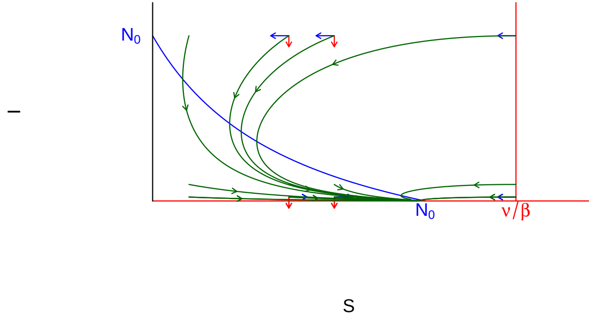
Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, directions des vecteurs vitesse



Le modÃ¨le Ã©pidÃ©miologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, trajectoires



L'infection ne se maintient pas dans la population.

Table des matiÃ¨res

1 Introduction : le modÃ¨le proies-prÃ©dateurs de Lotka-Volterra

2 Les systÃ¨mes planaires dans $\mathbb{R}^2$

3 Étude qualitative des systÃ¨mes non linÃ©aires dans $\mathbb{R}^2$

4 Exemples classiques

5 Pour aller plus loin

Plan dÃ©taillÃ©

5 Pour aller plus loin

- Le modÃ¨le proie prÃ©dateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intÃ©grale premiÃ¨re
- Suggestion de lecture

Le modÃ¨le proie-prÃ©dateur

Avec une croissance exponentielle des proies

Les Ã©quations du modÃ¨le sont

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

Isoclines nulles

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{dN}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow & N(r - \alpha P) = 0 \\ \Leftrightarrow & N = 0 \\ \texttt{ou} & P = \dfrac{r}{\alpha} \end{array}$$

Isoclines nulles

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{dP}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow & P(-\mu + \beta N) = 0 \\ \Leftrightarrow & P = 0 \\ \texttt{ou} & N = \dfrac{\mu}{\beta} \end{array}$$

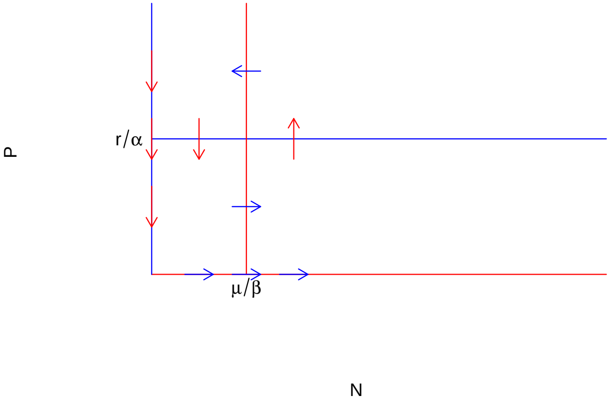
Points d'Ã©quilibre

Les points d'Ã©quilibre sont Ã l'intersection des isoclines nulles.

$$\begin{cases} N = 0 \\ P = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N = \dfrac{\mu}{\beta} \\ P = \dfrac{r}{\alpha} \end{cases}$$

Portrait de phase

Vecteurs vitesse



Matrice Jacobienne du systÃ¨me

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix}$$

Matrice Jacobienne du systÃ¨me

Au point d'Ã©quilibre $N = 0, P = 0$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_{0,0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}) < 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est un point selle.

Matrice Jacobienne du systÃ¨me

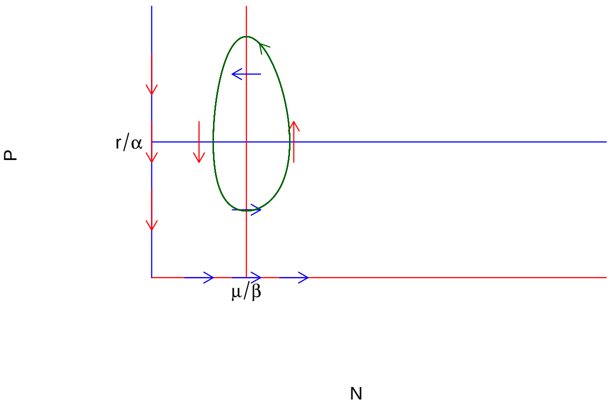
Au point d'Ã©quilibre $N^\star = \frac{\mu}{\beta}, P^\star = \frac{r}{\alpha}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_{N^\star, P^\star} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N^\star \\ \beta P^\star & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}) = \alpha\beta N^\star P^\star > 0$ et $\mathtt{tr}(\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow$ la linÃ©arisation prÃ©voit des centres.
Le thÃ©orÃ¨me de linÃ©arisation ne peut pas s'appliquer.

Ã‰volution du systÃ¨me

Le point d'Ã©quilibre non trivial est un centre



Plan dÃ©taillÃ©

5 Pour aller plus loin

- Le modÃ¨le proie prÃ©dateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intÃ©grale premiÃ¨re
- Suggestion de lecture

IntÃ©grale premiÃ¨re

Les solutions $(N(t), P(t))$ du systÃ¨me vÃ©rifient

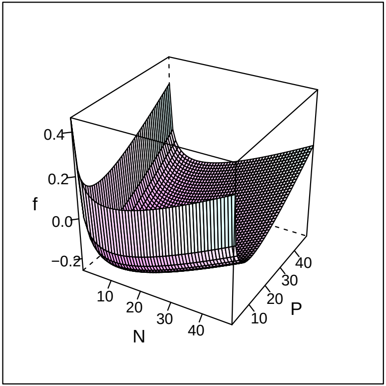
$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} &= -\mu P + \beta NP \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dN}{dP} = \frac{(r-\alpha P)N}{(\beta N - \mu)P}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{\beta N - \mu}{N} dN = \frac{r - \alpha P}{P} dP \\ &\Rightarrow \quad \int (\beta - \frac{\mu}{N}) dN = \int (\frac{r}{P} - \alpha) dP \\ &\Rightarrow \quad \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P) = K \end{aligned}$$

oÃ^{1}K$estuneconstantequelconque.$
On note $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$.

Graphe de la fonction f

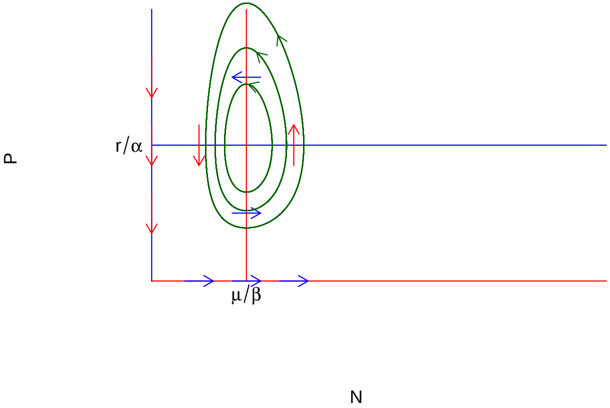
Pour $r = \mu = 0.1$, et $\alpha = \beta = 0.01$



$f(N, P)$ admet un minimum en $\left(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha}\right)$

Évolution du systÃ¨me

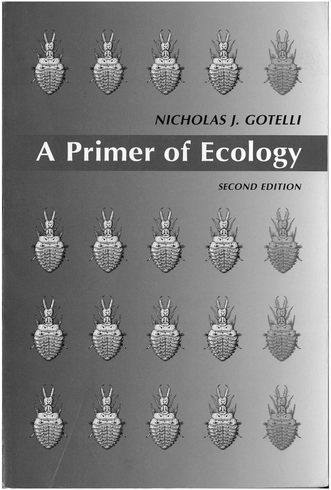
Les solutions suivent des courbes de niveau de f



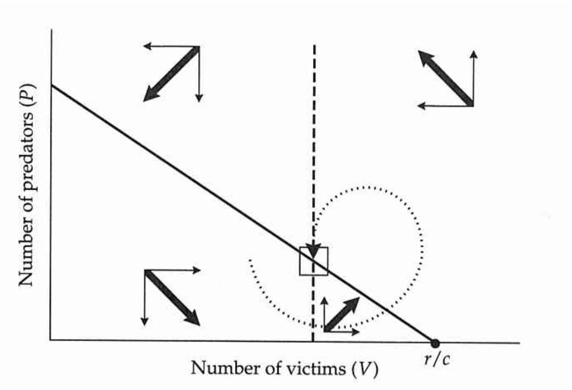
Plan dÃ©taillÃ©

5 Pour aller plus loin
- Le modÃ¨le proie prÃ©dateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intÃ©grale premiÃ¨re
- Suggestion de lecture

Suggestion de lecture



Suggestion de lecture



Suggestion de lecture