Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Analyse – Étude de fonctions

S. Mousset / S. Charles

Automne 2013

Resp : S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

Organisation du Cours

1. Étude de fonctions.
2. Intégration
3. Équations différentielles

Méthode d'étude d'une fonction

1. Domaine de définition.
2. Parité / Périodicité
3. Étude des variations sur un intervalle approprié
   - Dérivation
   - Étude des limites aux bornes de l'intervalle
   - Tableau de variation (avec limites et extrema).
4. Points d'inflexion (éventuellement).
5. Asymptotes obliques (éventuellement).
6. Représentation graphique

Table des matières

Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Intervalle

a et b deux réels distincts, $a < b$.

- Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$
- Intervalles semi-ouverts (ou semi-fermés) :
  $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$
- Par extension avec $\pm\infty$:
  $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$
  $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$

a et b sont les “bornes” de l’intervalle.

Voisinage d'un réel a

Définition : $a \in \mathbb{R}$, on appelle "voisinage de a" un intervalle ouvert contenant a.

Exemple : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est un voisinage de a.

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition : Une fonction réelle f d'une variable réelle est une transformation qui à tout élément x d'une partie (domaine) $D \subset \mathbb{R}$ fait correspondre un *unique* élément de $\mathbb{R}$, noté $f(x)$ et appelé "image de x".

Notation :

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

D est le "domaine de définition de f", souvent noté D_f.

Domaine de définition

Définition : Le domaine de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels il existe une image unique de x par la fonction f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists ! y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 1 > 0\} \\ &=]1, +\infty[\end{aligned}$$

Image du domaine de définition

Définition : L'image du domaine de définition D_f par une fonction f, notée $f(D_f)$ est l'ensemble des réels y pour lesquels il existe au moins un antécédent x par la fonction f.
$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in D_f, y = f(x)\}$

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

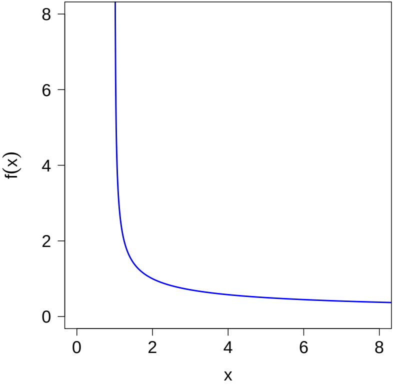
$$D_f =]1, +\infty[$$

$$f(D_f) =]0, +\infty[$$

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f dans un repère cartésien (Ox, Oy) est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$



Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Opérations

f et g deux fonctions réelles définies sur D_g et D_f.

- Produit : $(fg)(x) = f(x)g(x)$
  $D_{fg} = D_f \cap D_g$
- Somme : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Inverse : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
  $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$
- Composition : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

Opérations

f et g deux fonctions réelles définies sur D_g et D_f.

- Quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
  $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in (D_f \cap D_g) \mid g(x) \neq 0\}$
- Multiplication par un réel : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$
  $D_{\alpha f} = D_f$
- $(-f)(x) = -f(x)$
  $D_{-f} = D_f$

Composition de fonctions

f et g deux fonctions réelles définies sur D_g et D_f.
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$$D_g \xrightarrow{g} E$$
$$D_f \xrightarrow{f} F$$
$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

Fonction réciproque

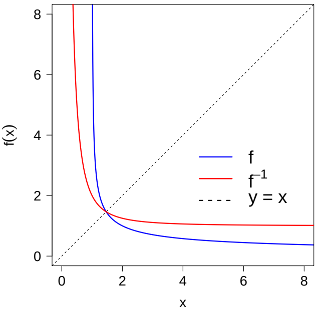
f une fonction réelle définie sur I telle que $f(I) = J$

- f admet une fonction réciproque s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que $f \circ g = Id_I$ et $g \circ f = Id_J$.
- g est notée f^{-1}

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$f^{-1} : y \mapsto 1 + \frac{1}{y^2}$$



Les graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Parité : fonction paire

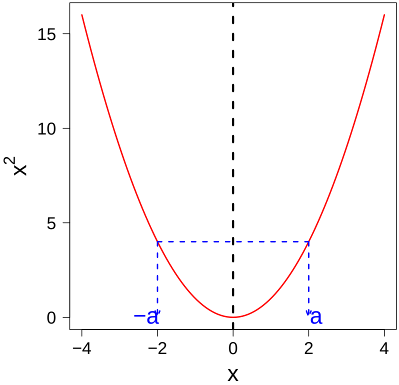
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *paire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

Le graphes est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : $f(x) = x^2$



Parité : fonction impaire

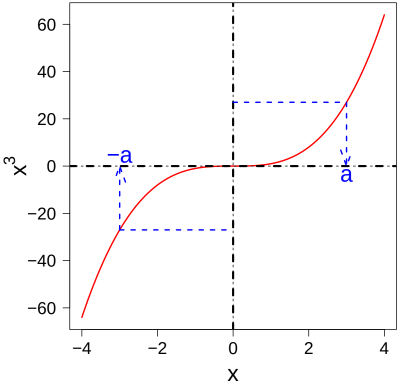
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *impaire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f,\ (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$

Le graphes est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple : $f(x) = x^3$



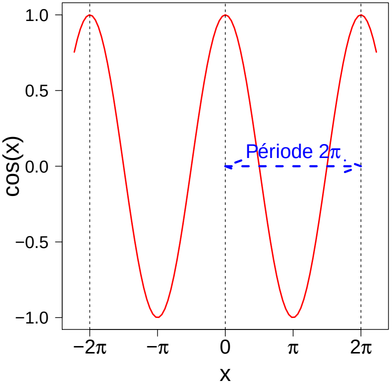
Périodicité

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *périodique de période* p si et seulement si

- $\forall x \in D_f,\ (x+p) \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(x+p) = f(x)$

Exemple : $f(x) = \cos x$ est paire et périodique de période 2π
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x$



Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Fonction croissante

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

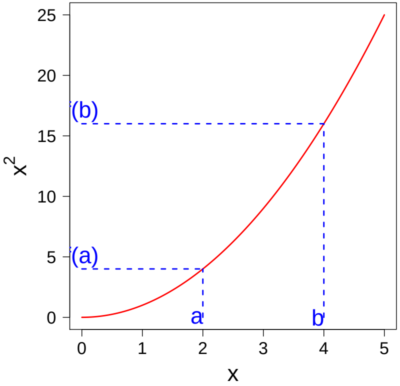
f est *croissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

f est *strictement croissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[0, 5[$.



fonction décroissante

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

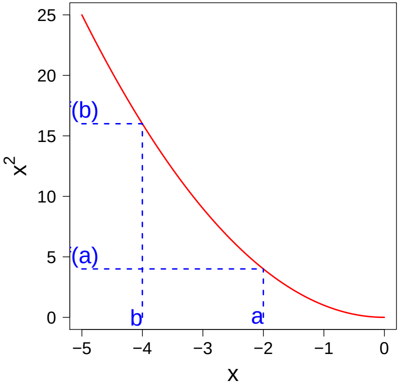
f est *décroissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

f est *strictement décroissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[-5, 0[$.



Taux d'accroissement

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. Soit $(a, b) \in D_f^2, a < b$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple : Le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ entre 1 et 2 est 3.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

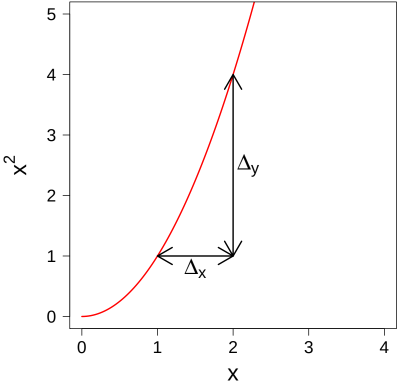


Table des matières

Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

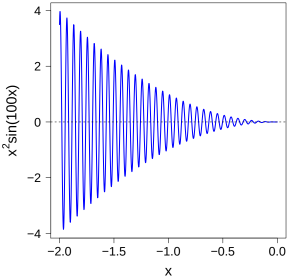
Limite finie en a^- (en a^+)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ à gauche en a si et seulement si

- $a \in D_f$ ou a est une borne de D_f.
- Lorsque $x \to a^-$, $f(x) \to l$

Mathématiquement, ces conditions s'écrivent
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$
$(x \in]a - \delta, a[\Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon])$
On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$



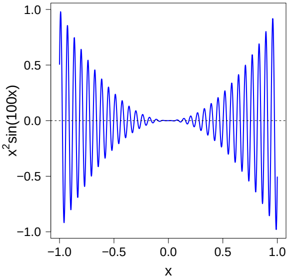
Ex : $f(x) = x^2 \sin(100x)$ qu'on regarde sur $[-2, 0]$.

Par analogie, on définit la limite en a^+.

Limite finie en a

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si

- Si $a \in D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = l$.
- Si $a \notin D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$.
  On peut prolonger f par continuité en écrivant $f(a) = l$.



On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Ex : $f(x) = x^2 \sin(100x)$ qu'on regarde sur $[-1, 1]$.

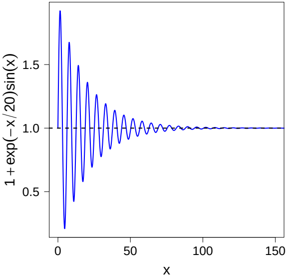
Limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

- Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to l$

Mathématiquement, ceci s'écrit
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},$
$(x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon])$
On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



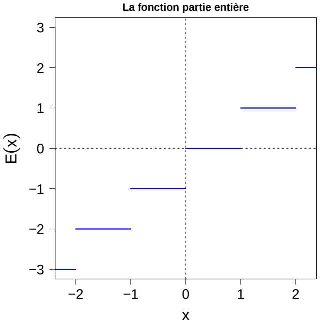
Ex : $f(x) = 1 + e^{-\frac{x}{20}} \sin x$
qu'on regarde sur $[0, 150]$.

On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale.

Continuité

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$.

- f est continue en $a \in D_f$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur $I \subset D_f$ si et seulement si $\forall a \in I, \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Exemple : $x \mapsto E(x)$ est continue sur les intervalles $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, mais discontinue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Propriétés des fonctions continues

En général, prouver la continuité d'une fonction quelconque est complexe. La plupart du temps, on utilise les propriétés sur la continuité de fonctions usuelles dont on sait qu'elles sont continues.

- Somme de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$
- Produit de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \frac{1}{x} e^x$
- Quotient de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Composition de fonctions continues. Exemple $x \mapsto e^{\cos(x)}$

Plan détaillé

3. Limites
   - Limites finies l
   - Limites infinies
   - Opérations sur les limites et formes indéterminées
   - Limites connues
   - Limites par comparaison

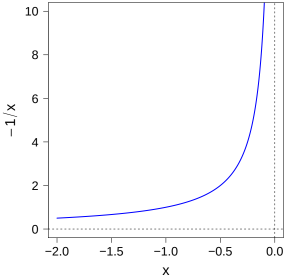
Limite infinie en a^- (en a^+)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet pour limite $+\infty$ à gauche en a si et seulement si

- Lorsque $x \to a^-$, $f(x) \to +\infty$

Mathématiquement, cette condition s'écrit
$\forall y > 0$, $\exists \delta > 0$,
$(x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$
On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$



Ex : $\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.

Limite infinie en a

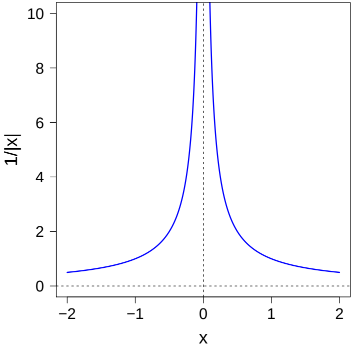
Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet pour limite $+\infty$ en a si et seulement si

- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$



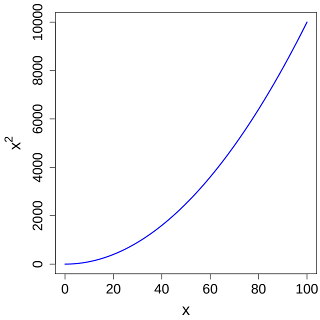
Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$
f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

- $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

Mathématiquement, cette condition s'écrit
$\forall y > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},$
$(x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$
On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Directions asymptotiques en $+\infty$ (ou $-\infty$)

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors f admet une branche parabolique Ox.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors f admet une branche parabolique Oy.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}^*$ alors on regarde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - lx$.
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - lx = \pm\infty$, alors f admet une branche parabolique de pente l.
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - lx = m \in \mathbb{R}$, alors f admet la droite $y = lx + m$ comme asymptote oblique.

Directions asymptotiques en $+\infty$ (ou $-\infty$)

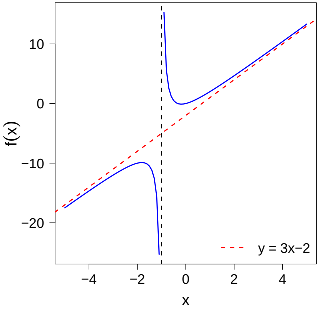
Exemple : $f\ :\ x \mapsto \frac{3*x^2+x}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

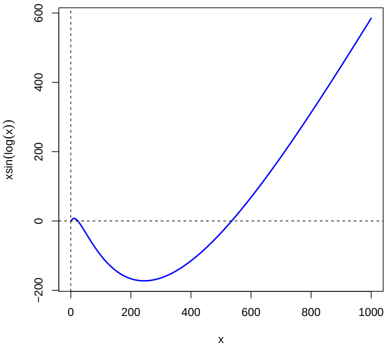
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 3x = -2$$

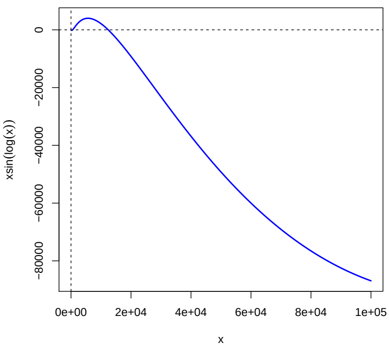


La droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote au graphe de la fonction f en $\pm\infty$.

Méfiez-vous de vos calculatrices

Exemple : La fonction $x \mapsto x\sin(\ln(x))$ n'admet pas de limite en $+\infty$.





Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

Opérations sur les limites et formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)$
$\lambda\neq 0$	$\mu\neq 0$	$\lambda+\mu$	$\lambda\mu$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda\neq 0$	0	λ	0	F.I. $\frac{\lambda}{0}$	$\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$
0	$\mu\neq 0$	μ	0	0	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
0	0	0	0	F.I. $\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $0\times\infty$	0	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
$\pm\infty$	$\mu\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I $0\times\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{0}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $\infty-\infty$	$\pm\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$

Formes indéterminées

$$\frac{\lambda}{0} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty \qquad \infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty}$$

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x \to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$
- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser par $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$
- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$

- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser par $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim_{x\to a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$
- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser par $(x-a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$
- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$

- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser par $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim\limits_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim\limits_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim\limits_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée
  Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

$$
\begin{aligned}
x - 1 - \sqrt{x^2-1} &= \frac{(x-1)^2 - \sqrt{x^2-1}^2}{x - 1 + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{-2x+2}{x-1+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{x}{x} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1
\end{aligned}
$$

Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

Polynômes en $\pm\infty$

En $\pm\infty$, les limites des polynômes sont celles du terme de degré le plus élevé.

Exemples :

- $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 7x + 1$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^5 = -\infty.$
- $f(x) = -2x^6 - 4x^5 + 5x^2 + 100$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^6 = -\infty.$

Fractions rationnelles en $\pm\infty$

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$. $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$
Les limites en $\pm\infty$ dépendent des degrés de N et D.

- N est de plus haut degré que $D \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = \pm\infty$

  Exemple : $\dfrac{x^5+1}{x^4+x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$
- N est de plus petit degré que $D \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = 0^{\pm}$

  Exemple : $\dfrac{x^4+x}{x^5+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^-$
- N et D sont de même degré $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = l$ où l est le rapport des coef. des termes de plus haut degré.

  Exemple : $\dfrac{4x^5+x^4+3x^2}{-x^5+6x^2+x+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -4$

Produits d'exponentielle

On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- $\forall\lambda > 0, \forall\mu > 0, \; \lim\limits_{x\to+\infty} x^\lambda e^{-x^\mu} = 0$
- $\forall\lambda > 0, \forall\mu > 0, \; \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^\mu}}{x^\lambda} = +\infty$

"C'est l'exponentielle qui l'emporte".

Produits de logarithme

On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \to 0} x^\lambda \ln x^\mu = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^\mu}{x^\lambda} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\lambda}{\ln x^\mu} = +\infty$

"C'est le x^λ qui l'emporte".

Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

Minoration / Majoration par une fonction $\to \pm\infty$

- S'il existe une fonction g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème “des gendarmes”

- S’il existe deux fonctions g et h, et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
- S’il existe une fonctions g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, |f(x) - l| \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Table des matières

Plan détaillé

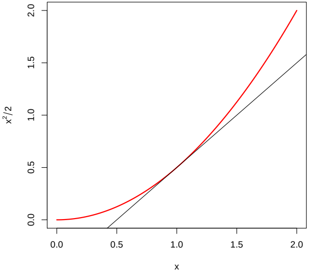
4. Dérivation
   - Taux d'acroissement local et dérivabilité
   - Opérations sur les dérivées
   - Dérivées usuelles
   - Propriétés diverses
   - Dérivée et variation
   - tableau de variations

Dérivabilité

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, $x \in D_f$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement de f entre x et $x+\varepsilon$ est

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{x+\varepsilon-x}$$



Si $\exists l \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\Delta_f}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} l$, alors l est appelé “nombre dérivé de la fonction f en x”.

On note

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = l$$

On dit que f est dérivable sur I si $\forall x \in I$ elle admet un $f'(x)$.

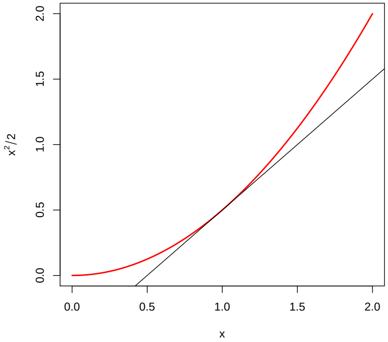
Équation de la tangente

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle dérivable en $x_0 \in D_f$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en x_0 est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0)$$

Exemple : La tangente à la courbe de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ en $x_0 = 1$ a pour équation $y = \frac{1}{2} + 1 \times (x - 1) = x - \frac{1}{2}$.



Plan détaillé

4. Dérivation
   - Taux d'acroissement local et dérivabilité
   - Opérations sur les dérivées
   - Dérivées usuelles
   - Propriétés diverses
   - Dérivée et variation
   - tableau de variations

Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions continues et dérivables, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Plan détaillé

4 Dérivation
- Taux d'acroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Propriétés diverses
- Dérivée et variation
- tableau de variations

Dérivées usuelles

- $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^a$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = ax^{a-1}$

$$
\begin{array}{ll}
a = 1 & f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\
a = -1 & f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\
a = \frac{1}{2} & f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\
a = \dfrac{n}{p} & f(x) = \sqrt[p]{x^n} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{n}{p\sqrt[p]{x^{p-n}}}
\end{array}
$$

Dérivées usuelles

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

Fonctions trigonométriques

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sin x \quad &\Rightarrow f'(x) = \cos x \\
f(x) = \cos x \quad &\Rightarrow f'(x) = -\sin x \\
f(x) = \tan x \quad &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \arcsin x &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) = \arccos x &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) = \arctan x &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Exemple de démonstration

On note $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arcsin(\sin x) = x$, et on calcule $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'(x)\arcsin'(\sin x) \\ &= \cos(x)\arcsin'(\sin x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On pose $t = \sin x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}$. On obtient alors

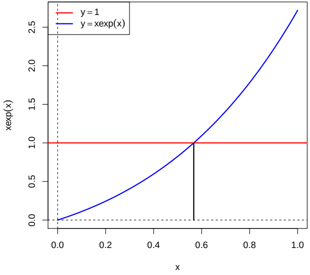
$$\left(\sqrt{1-t^2}\right)\arcsin'(t) \Leftrightarrow \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Plan détaillé

4 Dérivation
- Taux d'acroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Propriétés diverses
- Dérivée et variation
- tableau de variations

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, tel que $f([a, b]) = [c, d]$.
$\forall y \in [c, d], \exists x \in [a, b], f(x) = y$.
Exemple : $f : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$, existe-t-il $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 1$?

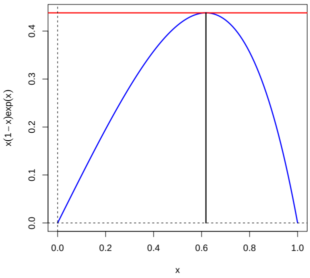


Théorème de Rolle

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $]a, b[$,
- telle que $f(a) = f(b)$,

alors $\exists x \in]a, b[, f'(x) = 0$.
Exemple : $f : x \mapsto x(1-x)e^x$ sur $[0, 1]$.
Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = 0$.



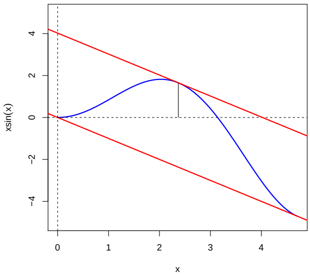
Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $[a, b]$,

alors $\exists x \in [a, b]$, $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exemple : $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Il existe $x \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$ tel que $f'(x) = -1$.



Plan détaillé

4 Dérivation
- Taux d'acroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Propriétés diverses
- Dérivée et variation
- tableau de variations

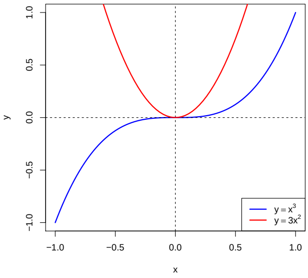
Variation

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\forall x \in I,\, f'(x) \geqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ est croissante sur } I$$

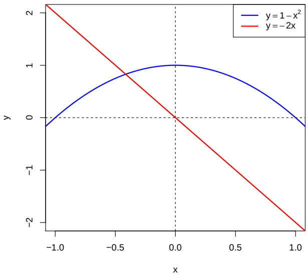
Exemple : $x \mapsto x^3$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - x^3}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} (3x^2 + 3x\varepsilon + \varepsilon^2) \\
&= 3x^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$



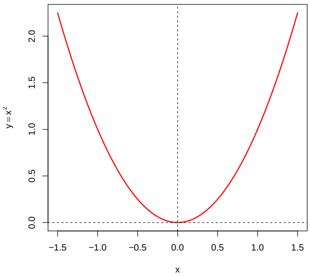
Extremum local

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue dérivable sur un voisinage de a, telle que f' s'annule en changeant de signe en a.
Alors f possède un extremum local en a.
Exemple :
$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$



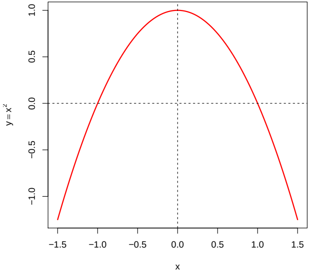
Concavité / Convexité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I, f''(x) > 0$, alors la courbe représentative de f est convexe sur I.
Exemple : $f : x \mapsto x^2$
Moyen mnémotechnique : conVexe



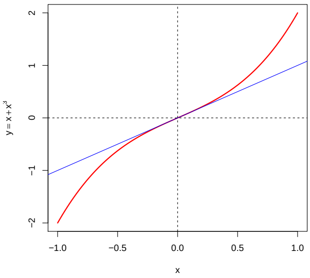
Concavité / Convexité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I, f''(x) < 0$, alors la courbe représentative de f est concave sur I.
Exemple : $f : x \mapsto 1 - x^2$
Moyen mnémotechnique : concAve



Points d'inflexion

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Si f'' s'annule et change de signe en a, alors la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en a.
Exemple :
$f(x) = x + x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x$



Plan détaillé

4. Dérivation
   - Taux d'acroissement local et dérivabilité
   - Opérations sur les dérivées
   - Dérivées usuelles
   - Propriétés diverses
   - Dérivée et variation
   - tableau de variations

Un exemple

La concentration de dioxygène (en mg/L) dans l'eau d'un sac de transport de poissons vivants vérifie :
$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t$ (pour $t > 0$).

$$C'(t) = 2e^{-t} - 0.1.$$

$$C'(t) > 0 \Leftrightarrow -t > \ln \frac{0.1}{2} \Leftrightarrow t < \ln 20$$

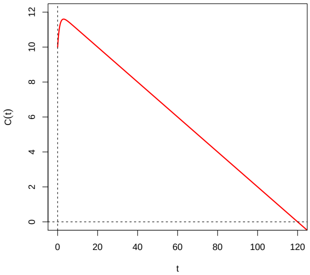
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} -0.1t = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} C(t) = -\infty$$

La fonction $C(t)$ admet la droite $y = -0.1t$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

Un exemple

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t \text{ (pour } t > 0).$$

t	0		$\ln 20$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	-	
$C(t)$	10	$\nearrow$	≈ 11.6	$\searrow$	$-\infty$



Conclusions : limites du modèle. . .