Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Analyse – Primitives / Intégration

S. Mousset / S. Charles

Printemps 2013

Resp : S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Notion de Primitive

Soit F une fonction dérivable telle que $F' = f$.

$$F \quad \underset{\text{Intégrer}}{\overset{\text{Dériver}}{\rightleftarrows}} \quad f$$

- F est une primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$
- Si F est une primitive de f, alors $F + K$ l'est aussi.
- L'ensemble des primitives de f est noté

$$\int f(x)\, dx$$

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Exemples de primitives

Voir formulaire http://mathsv.univ-lyon1.fr

Dérivée	Primitive
x^α, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\ln x$	$x \ln x - x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

Exemples de primitives

Voir formulaire http://mathsv.univ-lyon1.fr

Dérivée	Primitive
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan \frac{x}{2} \right\rvert$

Exemples de primitives

Voir formulaire `http://mathsv.univ-lyon1.fr`

Dérivée	Primitive
$\dfrac{u'}{u^m}$, où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\dfrac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Interprétation géométrique

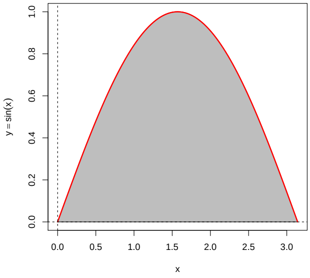
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{m},k} \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{M},k}$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

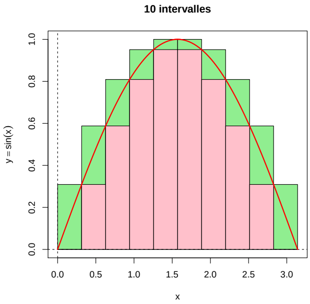
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{m},k} \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{M},k}$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

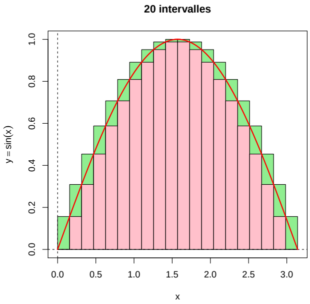
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{m},k} \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{M},k}$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

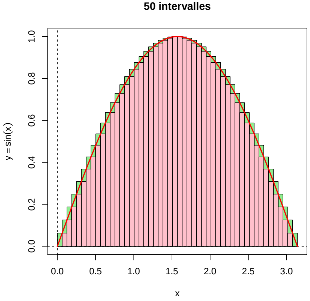
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{m},k} \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta x f_{\mathrm{M},k}$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : $C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau C_0 e^{-\lambda t}\,dt = \frac{C_0}{\tau}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^\tau = \frac{C_0}{\lambda\tau}\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right)$$

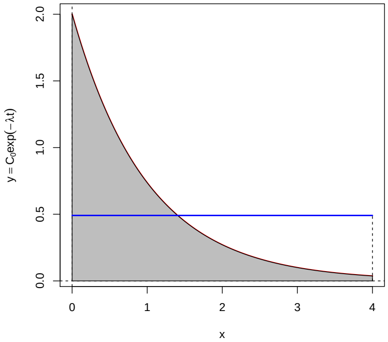


Table des matières

Plan détaillé

2 Propriétés
- Relation de Chasles
- Inégalités et intégration
- Parité et intégration

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

Conséquences :

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$)

- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

Plan détaillé

2 Propriétés
- Relation de Chasles
- Inégalités et intégration
- Parité et intégration

Intégrales de fonctions paires/impaires

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Table des matières

Plan détaillé

Décomposition en somme

Principe

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \; dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Plan détaillé

3 Méthodes de calcul
- Décomposition en somme
- Changement de variable
- Décomposition en éléments simples
- Intégration par parties

Changement de variable
Principe

On pose $x = \Phi(t)$ d'où $dx = \Phi'(t)dt$

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ \Phi)(t)\Phi'(t)\,dt$$

Changement de variable

Exemple

On veut calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

On pose $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = t^2+1$

- $x = a \;\Leftrightarrow\; t = \sqrt{a-1}$
- $x = b \;\Leftrightarrow\; t = \sqrt{b-1}$
- $x = t^2+1 \;\Rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{t}{t^2+1} 2t\,dt = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)\,dt = 2\left[t - \arctan t\right]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}}$$

$$= 2\left[\sqrt{x-1} - \arctan\sqrt{x-1}\right]_a^b$$

Plan détaillé

3 Méthodes de calcul
- Décomposition en somme
- Changement de variable
- Décomposition en éléments simples
- Intégration par parties

Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction qui est le rapport de deux fonctions polynomes.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynomes. Principe : Réduire f en “éléments simples” pour obtenir :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

On cherche ensuite les λ_i tels que

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{x - r_i}$$

où les r_i sont les racines du polynôme $B(x)$

Premier exemple

On veut calculer $\int \frac{1}{x(x-1)}\, dx$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

Par identification, on obtient $-a = 1$ et $a + b = 0$, soit $a = -1$ et $b = 1$.

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

Deuxième exemple

On veut calculer $\int \frac{x^2+2x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$

- On factorise $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ en remarquant que $x=1$ est une racine.

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)(x^3-x^2+x-1)$$

- On factorise x^3-x^2+x-1 en remarquant que $x=1$ est une racine.

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$$

- On décompose la fraction rationnelle en éléments simples

$$\frac{x^2+2x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{a+bx}{(x-1)^2}+\frac{c+dx}{x^2+1}$$

Deuxième exemple

- Par identification, on obtient $a = 2,\ b = 0,\ c = -1,\ d = 0.$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

- On intègre séparément les deux éléments

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx = -\frac{2}{x-1} + K_1$$

- On intègre séparément les deux éléments

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x + K_2$$

- Finalement :

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = -\frac{2}{x-1} - \arctan x + K$$

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Intégration par parties

Principe

Dérivée d'un produit de fonctions uv.

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

En intégrant de part et d'autre de l'égalité :

$$\int (u'v)(x)\,dx = \int \left((uv)'(x) - (uv')(x)\right)\,dx$$

Soit

$$\int (u'v)(x)\,dx = uv(x) - \int (uv')(x)\,dx$$

Intégration par parties

Exemple

Que vaut $\int \ln x \, dx$?

On pose :

- $u'(x) = 1 \Leftarrow u(x) = x$
- $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

La formule de l'intégration par partie donne :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K$$

Intégration par parties

Quand l'utiliser ?

- Produits de fonctions
- Simplifier des produits de fonctions à intégrer (éventuellement, plusieurs IPP)
  - $\int P(x)e^x\,dx$ où P est un polynôme.
  - $\int P(x)\sin x\,dx$ ou $\int P(x)\cos x\,dx$ où $P(x)$ est un polynôme.
- Faire apparaître une propriété simple : $\int e^x \sin x\,dx$ (2IPP nécessaires)

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx$

Première intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx = \int (u_1' v_1)(x) \, dx$

- $u_1'(x) = e^x \Leftarrow u_1(x) = e^x$
- $v_1(x) = \sin x \Rightarrow v_1'(x) = \cos x$

IPP1 : $\int (u_1' v_1)(x) \, dx = [(u_1 v_1)(x)] - \int (u_1 v_1')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$$

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$

Deuxième intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx = \int (u_2' v_2)(x) \, dx$

- $u_2'(x) = e^x \Leftarrow u_2(x) = e^x$
- $v_2(x) = \cos x \Rightarrow v_2'(x) = -\sin x$

IPP2 : $\int (u_2' v_2)(x) \, dx = [(u_2 v_2)(x)] - \int (u_2 v_2')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \left([e^x \cos x] - \int -e^x \sin x \, dx \right)$$

Soit :

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + K$$